

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة المسماة

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
 - L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
 - Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
 - L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse(10 pts)
 - L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
 - L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique(3 pts)
 - L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e}$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère **orthogonal** $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie I :

- 0.25 1- a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(1-x) = f(x)$
 0.25 b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 0.5 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 0.5 d) Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

0.5 2- a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = f(x) \frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$
 b) Donner les variations de f puis en déduire que :

1 $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 < f(x) < \frac{1}{2}$

- 0.5 3- Représenter graphiquement la courbe (Γ) .

(On prendra $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$, $\|\vec{j}\| = 2\text{cm}$ et $\frac{1}{2\sqrt{e}} \approx 0.30$ et $\frac{1}{1+e} \approx 0.27$)

0.5 4- a) Montrer que: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$

0.25 b) En déduire que $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

- 0.25 5- a) En effectuant le changement de variables : $t = e^x$, montrer que :

0.25 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e}$

0.5 b) Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right)$

- 0.25 c) En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine plan délimité par (Γ) , les droites
 d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

- 0.5 1- En utilisant le résultat de la question I.2-a), montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; |f'(x)| \leq f(x)$

0.5 2- a) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right) ; 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$

- 0.25 b) Montrer que la fonction $g: x \mapsto g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}
- 0.5 c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$
- 0.5 3- a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \frac{1}{2}$
- 0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
- 0.5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- 0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

Partie III :

On considère la suite numérique $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

- 0.25 1-a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
- 0.5 b) Montrer que : $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$
(On pourra effectuer le changement de variables : $t = 1 - x$)
- 0.5 2- Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit $\alpha \in [0; 2\pi[$

On considère dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation (E_α) d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$$

Partie I :

- 0.25 1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est : $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i))^2$
- 0.5 b) En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) avec $|a| < |b|$
- 0.25 2- Vérifier que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note par $M(z)$ le point d'affixe le nombre complexe z

On pose $\frac{b}{a} = \lambda i$ avec $\lambda = \operatorname{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$

1- On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$ avec $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

0.5 a) Montrer que : $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$ puis en déduire que les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.

0.5 b) Montrer que : $\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}$ puis en déduire que les points H, A et B sont alignés.

2- Soient $I(m)$ le milieu du segment $[OH]$ et $J(n)$ le milieu du segment $[HB]$

0.5 a) Montrer que : $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$

0.5 b) En déduire que les droites (OJ) et (AI) sont perpendiculaires et que $OJ = |\lambda| AI$

0.25 c) Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI)

Montrer que les points K, I, H et J sont cocycliques.

0.25 d) Montrer que les droites (IJ) et (OA) sont perpendiculaires.

EXERCICE3 : (3 points)

Soient p un nombre premier impair et a un entier premier avec p

0.5 1- Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$

2- On considère dans \mathbb{Z} l'équation : $ax^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Soit x_0 une solution de cette équation.

0.5 a) Montrer que : $x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

0.25 b) En déduire que : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

3- Soit n un entier naturel non nul.

0.5 a) Montrer que si p divise $2^{2n+1} - 1$ alors $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

0.5 b) En déduire que l'équation (E) : $11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$ admet au moins une solution dans \mathbb{Z}^2

4- On considère dans \mathbb{Z} l'équation (F) : $x^2 + 5x + 2 \equiv 0 \pmod{11}$

0.25 a) Montrer que : $(F) \Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 \pmod{11}$

0.5 b) En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solution dans \mathbb{Z}

EXERCICE4 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la

matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ est

un espace vectoriel réel.

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $E = \{M(x) = I + xA / x \in \mathbb{R}\}$

0.25 1- a) Vérifier que : $A^2 = -2A$

0.25 b) En déduire que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$

0.25 2- a) Calculer $M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0.25 b) En déduire que la matrice $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

0.25 3- Montrer que : $E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ est stable pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

(on pourra utiliser l'identité : $\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2} \left(x + y - 2xy - \frac{1}{2}\right)$)

1 4- Montrer que : $\left(E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}, \times\right)$ est un groupe commutatif.

5- On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x)T M(y) = M\left(x + y - \frac{1}{2}\right)$$

et on considère l'application φ définie de \mathbb{R} vers E par : $\forall x \in \mathbb{R} ; \varphi(x) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)$

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T) et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$

0.25 b) En déduire que (E, T) est un groupe commutatif.

0.5 6- Montrer que (E, T, \times) est un corps commutatif.