Cours : Etude des fonctions

Contenu	Capacités attendues
▪ Asymptote horizontale et asymptote verticale ▪ *Eléments de symétrie d'une courbe* ▪ *Etude et représentation graphique d'une fonction* ▪ *Applications*	• *Utiliser les éléments de symétrie d'une courbe pour simplifier l'étude d'une fonction* • *Représenter des fonctions polynomiales du second degré et du troisième degré, ainsi que des fonctions définies par morceaux* • *Utiliser la représentation graphique d'une fonction ou son tableau de variations pour étudier les solutions de certaines équations et inéquations.*

I. Asymptote horizontale et asymptote verticale

a. <u>Activité</u> : On considère la fonction f *définie sur* $]-\infty;1[\cup]1+\infty[$ *comme suit :*

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$$

Et soit (Cf) sa courbe dans un repère orthonormé :

1) Vérifier que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$

On dit que la droite d'équation :$y = 2$ est une asymptote horizontale de (Cf) au voisinage de $\pm\infty$

2) Vérifier que $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

On dit que la droite d'équation :$x = 1$ est une asymptote verticale de (Cf)

b. <u>Définition et propriété</u>

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $]a\,;+\infty[$

On dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de (Cf) quand x *tend vers* $+\infty$ *si :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

De même si f une fonction numérique définie sur un intervalle $]-\infty;a[$

On dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de (Cf) quand x *tend vers* $-\infty$ *si :*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $]a\,; a+\alpha[\ \ avec\ a \in R\ et\ \alpha > 0$

  On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de (Cf) quand x *tend vers* a^+ (à *droite de* a) *si :*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \ \ ou \ \ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

De même si f est définie sur un intervalle $]a-\alpha; a[$

On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de (Cf) quand x *tend vers* a^- (à *gauche de* a) *si :*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \ \ ou \ \ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

c. <u>**Applications**</u>

1) Soit f *une* fonction définie par : $f(x) = \frac{x-3}{2x-4}$
   1. Déterminer *Df*
   2. Calculer $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ puis donner une interprétation graphique
   3. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique
2) Soit f *une* fonction définie par : $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$
   4. Déterminer *Df*
   5. Calculer $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ puis donner une interprétation graphique
   6. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique

salimaths.com

II. Eléments de symétrie d'une courbe

a. ***Propriété :***

Soit f une fonction numérique et (Cf) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- *La droite (D) d'équation* $x = a$ *est un axe de symétrie de (Cf) si et seulement si :*

$$\forall x \in Df : 2a - x \in Df \ et \ f(2a - x) = f(x)$$

- *Le point* $\Omega(a\,;b)$ *est un centre de symétrie de (Cf) si et seulement :*

$$\forall x \in Df : 2a - x \in Df \ et \ f(2a - x) = 2b - f(x)$$

b. ***Applications :***

1) Soit la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$

1. *Déterminer Df*
2. *Montrer que la droite (D) d'équation* $x = 2$ *est un axe de symétrie de Cf*

2) Soit la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2$

3. *Déterminer Df*
4. *Montrer que le point* $\Omega(0\,;2)$ *est un centre de symétrie de Cf*

III. Etude et représentation graphique d'une fonction

Méthodologie :

1. Déterminer l'ensemble de définition
2. Calculer les limites aux bornes
3. Etudier la dérivabilité et calculer f'
4. Etudier le signe de f' et dresser le tableau des variations
5. Déterminer les extremums
6. Tracer la courbe représentative

1. Fonctions polynômes du 2nd degré

Exercice 1 : Soit f *une* fonction définie par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

1. Déterminer Df

2. Calculer les limites aux bornes
3. Déterminer f'
4. Etudier le signe de f' et dresser le tableau des variations
5. Déterminer les extremums
6. Dans un repère orthonormé tracer la courbe (C*f*)

Exercice 2 : Soit *f une* fonction définie par : $f(x) = -3x^2 + 12x - 1$

1. Déterminer *Df*
2. Calculer les limites aux bornes
3. Déterminer f'
4. Etudier le signe de f' et dresser le tableau des variations
5. Déterminer les extremums
6. Dans un repère orthonormé tracer la courbe (C*f*)

2. Fonctions homographiques

Exercice 1 : Soit *f une* fonction définie par : $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

1. Déterminer *Df*
2. Calculer les limites aux bornes et déterminer les asymptotes
3. Déterminer f'
4. Etudier le signe de f' et dresser le tableau des variations
5. Dans un repère orthonormé tracer la courbe (C*f*)

Exercice 2 : Soit *f une* fonction définie par : $f(x) = \frac{-2x+1}{x+2}$

1. Déterminer *Df*
2. Calculer les limites aux bornes et déterminer les asymptotes
3. Déterminer f'
4. Etudier le signe de f' et dresser le tableau des variations
5. Dans un repère orthonormé tracer la courbe (C*f*)

3. Fonctions polynômes du 3ème degré

Exercice 1 : Soit *f une* fonction définie par : $f(x) = x^3 - x^2 + x$

1. Déterminer *Df*

salimaths.com

2. Calculer les limites aux bornes
3. Déterminer f'
4. Etudier le signe de f' et dresser le tableau des variations
5. Déterminer les extremums
6. Dans un repère orthonormé tracer la courbe (C*f)*

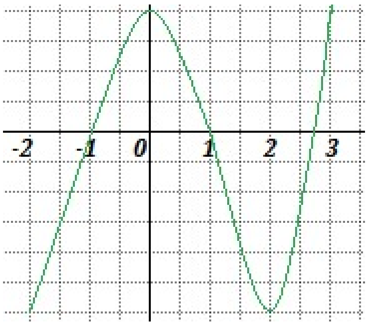
Exercice 2 : Soit f *une* fonction définie par : $f(x) = x^3 - 12x + 7$

1. Déterminer *Df*
2. Calculer les limites aux bornes
3. Déterminer f'
4. Etudier le signe de f' et dresser le tableau des variations
5. Déterminer les extremums
6. Dans un repère orthonormé tracer la courbe (C*f)*

Exercice 3 : Soit f *une* fonction définie par : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$

1. Déterminer *Df*
2. Calculer les limites aux bornes
3. Déterminer f'
4. Etudier le signe de f' et dresser le tableau des variations
5. Déterminer les extremums
6. Dans un repère orthonormé tracer la courbe (C*f)*
7. *Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :*
   $$f(x) = -1 \,;\, f(x) = -4 \text{ } et \text{ } f(x) = -5$$
8. Calculer $f(1) et$ $f(2)$ et en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $x_0 \in]1; 2[$
9. D'après la représentation graphique de la fonction f $d$éterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$

Exercice 4 : *ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f* définie sur l'intervalle $[-2 \,;\, 3]$



1. Résoudre les équations suivantes :

$$f(x) = 0\,;\, f(x) = 2 \ et\ f(x) = -3$$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

$$f(x) < 0\,;\, f(x) < -1 \ et\ f(x) \geq 0$$

salimaths.com