



Contenu	Capacités attendues
<ul style="list-style-type: none">• Proposition et fonction propositionnelle• Quantificateurs• Opérations sur les propositions• Méthodes de raisonnement	<ul style="list-style-type: none">• Maîtriser l'utilisation du raisonnement approprié selon la situation étudiée• Être capable de formuler des preuves et des raisonnements mathématiques clairs et logiquement corrects• Étudier la validité d'une proposition logique• Comprendre le sens d'une proposition logique et en donner la négation.

I. Proposition, fonction propositionnelle

▪ Définitions

- ✓ Une proposition est un énoncé mathématique qui a une et une seule valeur : vrai ou faux. On note souvent une proposition par P, Q, R, \dots etc
- ✓ Une fonction propositionnelle est un énoncé contenant une ou plusieurs variables et qui appartient à des ensembles déterminés. On note souvent une fonction propositionnelle par $P(x), Q(x,y), R(x,y,z), \dots$ etc

▪ Exemples

✚ $3 + 7 = 2$ est une proposition fausse

✚ $3 + 7 = 10$ est une proposition correcte

✚ $3 + x < 10$ tel que $x \in \mathbb{R}$ est une fonction propositionnelle correcte si $x < 7$ et fausse si $x \geq 7$

✚ $x^2 \geq 0$ tel que $x \in \mathbb{R}$ est une fonction propositionnelle

correcte car pour tout x de \mathbb{R} , x^2 est toujours positif

II. Quantificateurs

▪ Définitions

Soit E un ensemble donné.

- ✓ Le quantificateur « pour tout » ou « quel que soit » est noté \forall .

La proposition : $\forall x \in E, P(x)$ est vraie lorsque, pour tout $x \in E$, la proposition

$P(x)$ est vraie.

- ✓ Le quantificateur « il existe au moins un élément » est noté \exists .

La proposition $\exists x \in E, P(x)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ telle que la proposition $P(x)$ soit vraie.

- ✓ Le quantificateur « il existe un élément unique » est noté $\exists!$

La proposition $\exists! x \in E, P(x)$ est vraie lorsqu'il existe un unique $x \in E$ telle que la proposition $P(x)$ soit vraie.

▪ Exemples

✚ $\forall x \in R : x^2 \geq 0$

✚ $\exists x \in R : x - 5 \geq 0$ (il suffit de prendre $x \geq 5$)

✚ $\exists! x \in R : x - 5 = 0$ (le seul nombre qui vérifie l'équation est 5)

▪ Exercice : Ecrire les énoncés suivants en utilisant les quantificateurs

- 1) Pour tout réel $x : |x| \geq 0$
- 2) Il existe au moins un nombre entier relatif x tel que : $x^2 = 4$
- 3) Il existe un réel unique x qui vérifie : $x^2 = 0$
- 4) Il existe un nombre entier naturel n tel que pour tout réel $x : nx = 0$

III. Opérations sur les propositions

1) La négation

▪ Définition et propriété

- ✓ La négation de la proposition P est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse et vice versa. Et elle est notée $\neg P$ ou \bar{P} .

tableau de vérité :

P	\bar{P}
V	F
F	V

- ✓ Soit E un ensemble donné. On a :

La négation de la proposition $\forall x \in E, P(x)$ est $\exists x \in E, \overline{P(x)}$

La négation de la proposition $\exists x \in E, P(x)$ est $\forall x \in E, \overline{P(x)}$

- La négation de quelques symboles mathématiques

le symbole	\leq	\geq	$=$	\in	\forall
sa négation	$>$	$<$	\neq	\notin	\exists

▪ **Exemples**

La proposition P	Sa négation \bar{P}
$\forall x \in R : x^2 \geq 0$	$\exists x \in R : x^2 < 0$
$\exists x \in N : x - 3 = 0$	$\forall x \in N : x - 3 \neq 0$
$(\exists n \in N)(\forall x \in R) : nx \in Z$	$(\forall n \in N)(\exists x \in R) : nx \notin Z$

▪ **Exercice :** Donner la négation de chacune des propositions suivantes

- 1) $\forall x \in N : -x \in Z$
- 2) $\forall x \in R : \sqrt{x^2} = |x|$
- 3) $\exists x \in R : x^2 = 4$
- 4) $\exists x \in R : x^2 - 3 = 0$
- 5) $(\exists n \in Z)(\forall x \in R) nx \geq 0$

2) La conjonction et la disjonction

▪ **Définitions :** Soient P et Q deux propositions.

- ✓ La conjonction de P et Q est la proposition qu'on note « P et Q » ou « $P \wedge Q$ » et qui est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.
- ✓ La disjonction de P et Q est la proposition qu'on note « P ou Q » ou « $P \vee Q$ » et qui est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions P ou Q est vraie.

tableau de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

▪ **Exemples**

- ✚ $3 \in N$ et $-3 \in Z$
- ✚ $\sqrt{5} \in Q$ ou $\sqrt{5} \in R$

3) L'implication

▪ **Définition :** Soient P et Q deux propositions.

L'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition qui est fausse seulement si P est vraie et Q est fausse.

Tableau de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Exemples**

- $x \in \mathbb{R} : x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$

- $x \in \mathbb{N} \Rightarrow -x \in \mathbb{Z}$

4) L'équivalence

- **Définition** : Soient P et Q deux propositions.

On dit que les propositions P et Q sont équivalentes s'elles ont la même valeur de vérité c'est à dire les deux sont fausses ou les deux sont vraies.

Et on écrit $P \Leftrightarrow Q$.

Tableau de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- **Exemples**

- $x \in \mathbb{N} : x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

- $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$

IV. Méthodes de raisonnement

1) par l'absurde

Propriété : pour démontrer que $P \Rightarrow Q$. on peut supposer que P et non Q sont toutes les deux vraies, et obtenir une contradiction. pour démontrer que P est vraie, on peut supposer que non P est vraie et obtenir une contradiction.

Application : par l'absurde montrer que :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N} : 2n + 1$ est impair
- 2) pour tous x et y de $\mathbb{R} : x^2 + y^2 \geq 2xy$
- 3) le système suivant

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

n'a pas de solutions dans \mathbb{R}^2

2) par disjonction de cas

Propriété : Le raisonnement par disjonction de cas s'utilise quand on veut démontrer une proposition P dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E , et que la justification dépend de la valeur de x .

Application :

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

2) Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

$$|2x - 6| = 2 ; |3x + 1| = |3 - 2x| ; |2x + 4| + 3|x - 1| - 7 = 0$$

3) par équivalence

Propriété : P et Q deux propositions logiques.

Pour démontrer que $P \Leftrightarrow Q$, il y a deux méthodes standard :

- On raisonne par double implication : on suppose d'abord que P est vraie, et on démontre que Q est vraie. Ensuite, on suppose que Q est vraie, et on démontre que P est vraie.
- On passe de P à Q en utilisant uniquement des équivalences. C'est une méthode souvent déconseillée, car il faut faire très attention à ce que chaque enchaînement logique de la démonstration est bien une équivalence.

Application : Montrer que :

1) Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a^2 + b^2 \geq 2ab$

2) $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$

3) Montrer que $x > 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$