

الصفحة	<p style="text-align: center;">الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الممالك الدولية الدورة العادية 2020 - الموضوع -</p>		<p style="text-align: center;">المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات</p>	
1				
5				
**				
*	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS		NS 24F	
4	مدة الإنجاز	الرياضيات		المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)		الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte (5) pages numérotées de 1/5 à 5/5
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux.
- Le candidat doit traiter EXERCICE3 et EXERCICE4 et choisir de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2.
- Le candidat doit traiter au total trois (3) exercices :

- EXERCICE1 qui concerne l'arithmétique (au choix).....3.5 points
- ou bien
- EXERCICE2 qui concerne les structures algébriques (au choix).....3.5 points
- EXERCICE3 qui concerne les nombres complexes (obligatoire).....3.5 points
- EXERCICE4 qui concerne l'analyse (obligatoire).....13 points

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

Tu choisies de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2
Tu traites obligatoirement EXERCICE3 et EXERCICE4

EXERCICE1 : (3.5 points/au choix)

(Si tu choisies de traiter EXERCICE1, il ne faut pas traiter EXERCICE2)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (D) : $7x^3 - 13y = 5$

1- Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (D)

0.5 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.5 b) En déduire que : $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$

1 c) Montrer que : $x^3 \equiv 10 \pmod{13}$

0.5 d) En déduire que : $x^{12} \equiv 3 \pmod{13}$

1 2- Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

EXERCICE2 : (3.5 points/au choix)

(Si tu choisis de traiter EXERCICE2, il ne faut pas traiter EXERCICE1)

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que (\mathbb{R}^*, \times) est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble E de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^* \right\}$.

0.5 1- a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

0.5 b) Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E

0.5 c) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^*) ; \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

0.5 2- Montrer que (E, \times) est un groupe non commutatif.

3- On considère le sous-ensemble F de E défini par : $F = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

0.5 a) Montrer que l'application φ définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \varphi(x) = M(x)$ est un homomorphisme de (\mathbb{R}^*, \times) vers (E, \times) .

1 b) En déduire que (F, \times) est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

EXERCICE3 :(3.5 points/obligatoire)

Soit m un nombre complexe non nul.

Première partie :

On considère dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z , $(E) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$

0.5 1- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) (On remarque que m est une solution de l'équation (E))

2- On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m

0.25 a) Vérifier que : $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

0.5 b) Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2

Deuxième partie :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$

On note P le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A ,

Q le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B

et R le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O

0.25 1- Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

1 2-a) Montrer que l'affixe de P est $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0.5 b) Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

0.5 3- Montrer que $OQ = PR$ et que les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

EXERCICE4 :(13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in]0; +\infty[) ; \quad f(x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

0.5 1- On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle

$$[x, x+1], \text{ montrer que : } (P) \quad (\forall x \in]0; +\infty[) ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

0.5 2-a) En utilisant la proposition (P) , montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0

0.5 b) En utilisant la proposition (P) , montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.



0.75 3-a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = 3x^2 \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{3(1+x)} \right)$$

0.5 b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I

(On pourra utiliser la proposition (P))

0.25 c) Dresser le tableau de variations de f

4- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

0.75 a) Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g'(x) = 2x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$, en déduire que la fonction g est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*

0.5 b) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur \mathbb{R}_+^* , une solution unique notée α
puis vérifier que $\alpha \in]1; 2[$ (On prendra $\ln 2 = 0.7$ et $\ln \frac{3}{2} = 1.5$)

0.5 c) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et α

0.5 5-a) Représenter graphiquement la courbe (C).

(On précisera la demi-tangente à droite en O et la branche parabolique de (C))

0.25 b) Montrer que f est une bijection de I vers I (On note f^{-1} sa bijection réciproque)

Deuxième partie :

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $0 < u_0 < \alpha$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

0.5 1- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \alpha$

0.5 2-a) Montrer que : $g(]0; \alpha[) =]0; 1[$

0.5 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

0.5 3- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Troisième partie :

On considère la fonction F définie sur l'intervalle I par : $(\forall x \in I) ; F(x) = \int_x^1 f(t) dt$

0.5 1-a) Etudier suivant les valeurs de x , le signe de $F(x)$

0.5 b) Montrer que la fonction F est dérivable sur I et déterminer sa dérivée première F'

0.25 c) En déduire que F est strictement décroissante sur I

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; F(x) \leq (1-x) \ln 2$

0.25 b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0.5 3-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) ; F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \frac{t^3}{t+1} dt$$

0.5 b) Calculer $\int_x^1 \frac{t^3}{t+1} dt$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ (On remarque que : $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$)

0.5 c) En déduire que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

0.5 d) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t) dt$

4- Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $v_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right)$

0.5 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$:

$$-\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\text{(On remarque que : } \frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n} \text{)}$$

0.25 c) Montrer que la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN