

الصفحة	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة الاستدراكية 2024 -الموضوع-		المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة	
1			RS 24	
4				
**				

4h	مدة الإجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة المسلك

### تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالتحليل.....(6.5 نقطة)
- التمرين 2 يتعلق بالتحليل.....(3.5 نقطة)
- التمرين 3 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 نقطة)
- التمرين 4 يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 نقطة)
- التمرين 5 يتعلق بالحسابيات.....(3 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها  
لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

**التمرين 1: (6.5 نقطة)**

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2

نعتبر الدالة  $f_n$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) ; f_n(x) = x - x^n \ln x \quad \text{و} \quad f_n(0) = 0$$

وليكن  $(C_n)$  منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم .

1- أ) بين أن  $f_n$  متصلة على اليمين في 0

0.25

ب) بين أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$  و أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$  ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.75

ج) بين أن  $f_n$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أن عددها المشتق على اليمين في 0 يساوي 1

0.5

د) بين أن  $f_n$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و أن:

0.5

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) ; f_n'(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x$$

هـ) بين أن  $f_n$  تزايدية قطعاً على  $[0; 1]$  و تناقصية قطعاً على  $[1, +\infty[$

0.5

2- أ) بين أن لكل  $n \geq 2$ ، لدينا:  $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad \forall x \in [0, +\infty[$  ;

0.5

ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين  $(C_n)$  و  $(C_{n+1})$

0.25

3- أ) بين أن لكل  $n \geq 2$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha_n \in ]1; 2[$  بحيث:  $f_n(\alpha_n) = 0$  (نأخذ  $\ln 2 = 0,7$ )

0.5

ب) تحقق أن:  $\alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = 1 \quad (\forall n \geq 2)$

0.25

ج) استنتج أن:  $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1 \quad (\forall n \geq 2)$

0.25

د) بين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  التي تم تعريفها، تناقصية قطعاً.

0.5

هـ) استنتج أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  متقاربة.

0.25

4- نضع  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

أ) بين أن:  $1 \leq \ell \leq 2$

0.25

ب) بين أن لكل  $n \geq 2$ ،  $n-1 = -\frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

0.5

ج) نفترض أن  $\ell > 1$ ، احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$  بدلالة  $\ell$

0.25

د) استنتج قيمة النهاية  $\ell$

0.5

**التمرين 2: (3.5 نقطة)**

1- أ) احسب التكامل:  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

0.25

ب) لكل عدد صحيح  $n \geq 1$ ، نضع:  $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k^2}$

0.5

بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 2}$  متقاربة ثم حدد نهايتها.

$$2- \text{بين أن: } \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \leq 1 \quad 0.25$$

$$3- \text{أ) بين أن: } 0 \leq e^x - 1 \leq e.x \quad (\forall x \in [0,1]) \quad ; \quad 0.5$$

$$\text{ب) استنتج أن: } 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2} x^2 \quad (\forall x \in [0,1]) \quad ; \quad 0.25$$

$$4- \text{لكل عدد صحيح } n \geq 1, \text{ نضع: } w_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left( e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1 \right)$$

$$\text{أ) بين أن لكل عدد صحيح } n \geq 1, \text{ لدينا: } 0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{n}{n^2+k^2} \right)^2 \quad 0.25$$

$$\text{ب) بين أن الدالة: } x \mapsto (1+x^2)^{-2} \text{ تناقصية قطاعا على المجال } [0,1] \quad 0.25$$

ج) استنتج أن لكل عدد صحيح  $n \geq 1$  و لكل عدد صحيح  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  ، لدينا:

$$\frac{1}{n} \left( 1 + \left( \frac{k}{n} \right)^2 \right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2} dx \quad 0.25$$

$$5- \text{أ) بين أن لكل عدد صحيح } n \geq 1, \text{ لدينا: } 0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n} \quad 0.5$$

ب) استنتج أن المتتالية  $(w_n)_{n \geq 1}$  متقاربة وحدد نهايتها. 0.5

### التمرين 3: (3.5 نقطة)

ليكن  $m \in \mathbb{C}^*$

الجزء I: نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  $z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$  (E)

$$1- \text{أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو } \Delta = (im)^2 \quad 0.25$$

ب) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة (E) 0.5

2- ليكن  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة (E)

اكتب  $z_1 z_2$  على الشكل الأسّي في الحالة حيث  $m = re^{i\theta}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$  ،  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ) 0.5

الجزء II: المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

$$\text{نضع } z_1 = m \text{ و } z_2 = m(1+i)$$

لتكن  $M_1$  النقطة ذات اللحق  $z_1$  و  $M_2$  النقطة ذات اللحق  $z_2$  و  $M_3(z_3)$  صورة النقطة  $O$  بالدوران الذي مركزه

$M_2$  وزاويته  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  و  $M_4(z_4)$  صورة النقطة  $M_1$  بالتحاكي الذي مركزه  $O$  ونسبته  $k$  ( $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ )

1- احسب  $z_3$  بدلالة  $m$  و  $z_4$  بدلالة  $m$  و  $k$  0.75

$$2- \text{اكتب على الشكل الجبري العدد } \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad 0.75$$

3- استنتج أن النقط  $M_1$  و  $M_2$  و  $M_3$  و  $M_4$  متداورة إذا وفقط إذا كان  $k = -2$  0.75

**التمرين 4: (3.5 نقطة)**

نزود مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  بقانون التركيب الداخلي  $*$  المعرف بما يلي:

$$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4 ; (x + iy) * (x' + iy') = (xy' + y^5 x') + iyy'$$

**الجزء I:**

1- (أ) تحقق أن:  $1 * (2i) = 2$  0.25

(ب) بين أن القانون التركيب الداخلي  $*$  ليس تبادليا. 0.25

2- بين أن القانون  $*$  تجميعي. 0.5

3- (أ) تحقق أن:  $1 * (1 + 2i) = 2$  0.25

(ب) استنتج أن  $(\mathbb{C}, *)$  ليس زمرة. 0.25

4- لتكن  $E$  المجموعة الجزئية من  $\mathbb{C}$  المعرفة بما يلي:  $E = \{x + yi / (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\}$

(أ) بين أن المجموعة  $E$  مستقرة في  $(\mathbb{C}, *)$  0.25

(ب) بين أن  $(E, *)$  زمرة غير تبادلية. 0.5

**الجزء II:**

نعتبر المجموعات الجزئية من المجموعة  $E$  المعرفة بما يلي:

$$G = \{x + i / x \in \mathbb{R}\} \text{ و } F = \{yi / y \in \mathbb{R}^*\}$$

1- بين أن  $F$  زمرة جزئية من  $(E, *)$  0.5

2- نعتبر التطبيق  $\varphi$  المعرف من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{C}$  بما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x + i$$

(أ) بين أن:  $\varphi(\mathbb{R}) = G$  0.25

(ب) بين أن  $\varphi$  تشاكل من  $(\mathbb{R}, +)$  نحو  $(\mathbb{C}, *)$  0.25

(ج) استنتج أن  $(G, *)$  زمرة تبادلية. 0.25

**التمرين 5: (3 نقط)**

1- باستعمال خوارزمية اقليدس، حدد العدد الصحيح  $\{1, 2, \dots, 22\}$   $u \in$  بحيث:  $10u \equiv 1 [23]$  0.5

2- ليكن  $m$  عددا صحيحا طبيعيا و  $q$  و  $r$ ، على التوالي، خارج وباقي القسمة الإقليدية للعدد  $m$  على 10

(أ) بين أن:  $m \equiv 10(q + ur) [23]$  0.5

(ب) بين أن:  $23$  يقسم  $m \Leftrightarrow 23$  يقسم  $(q + ur)$  0.75

3- نعتبر في  $\mathbb{N}$  النظام  $(S): \begin{cases} x \equiv 1 [23] \\ x \equiv 2 [10] \end{cases}$

(أ) بين أنه إذا كان  $x$  حلا للنظمة  $(S)$  فإنه يوجد  $q \in \mathbb{N}$  بحيث  $x = 10q + 2$  و  $23$  يقسم  $(q + 7)$  0.75

(ب) حل في  $\mathbb{N}$  النظام  $(S)$  0.5

انتهى