4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة المسلك

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين1 يتعلق بالتحليل..(7.5 نقطة)
- التمرين2 يتعلق بالتحليل..(2.5 نقطة)
- التمرين3 يتعلق بالأعداد العقدية....................................(3.5 نقطة)
- التمرين4 يتعلق بالبنيات الجبرية....................................(3.5 نقطة)
- التمرين5 يتعلق بالحسابيات...(3 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

التمرين1: (7.5 نقطة)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بما يلي:

$$f(1)=\frac{1}{2} \quad \text{و لكل } x\in]1,+\infty[\text{، } f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- بين أن f متصلة على اليمين في 1 — 0.5

2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. — 0.5

3- أ) ليكن $x\in]1,+\infty[$

بوضع: $t=(x-1)^2$ ، تحقق أن: $\dfrac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$ — 0.25

ب) بين أن: $(\forall t\in]0,+\infty[)\ ,\ -\dfrac{1}{2}<\dfrac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t}<\dfrac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$ — 0.5

(يمكن استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية على المجال $[0;t]$)

ج) استنتج أن: $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$ — 0.25

4- أ) تحقق أن لكل $x\in]1,+\infty[$: $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=-\dfrac{\ln(x)}{x-1}\times\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$ — 0.5

ب) استنتج أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. — 0.5

5- لكل $x\in[1,+\infty[$ نضع $I(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2-1}{t^3}dt$ و $J(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2-1}{t^2}dt$

أ) بين أن: $\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\le I(x)\le J(x)$ — 0.5

ب) بين أن لكل $x\in[1,+\infty[$ ، $I(x)=\ln(x)-\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ و $J(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}$ — 0.5

ج) تحقق أن: $\forall x\in]1,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}\times\dfrac{I(x)}{J(x)}$ — 0.5

د) استنتج أن: $\forall x\in]1,+\infty[,\ -\dfrac{1}{2}\le f'(x)\le 0$ — 0.5

6- أ) ضع جدول تغيرات الدالة f — 0.25

ب) أنشئ المنحنى (C) (نأخذ $\|\vec{i}\|=1\text{cm}$ و $\|\vec{j}\|=2\text{cm}$) — 0.5

7- بين أن المعادلة $f(x)=x-1$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $]1,2[$ — 0.5

8- لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$a_0\in[1,+\infty[\quad \text{و لكل } n\in\mathbb{N} \text{، } a_{n+1}=1+f(a_n)$$

أ) بين أن: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ \left|a_{n+1}-a\right|\leq\frac{1}{2}\left|a_n-a\right|$ 0.5

ب) بين بالترجع أن: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ \left|a_n-a\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left|a_0-a\right|$ 0.5

ج) استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة. 0.25

التمرين2: (2.5 نقطة)

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$

1- أ) بين أن F متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0;1]$ 0.5

ب) استنتج أن F تقابل من المجال $[0;1]$ نحو المجال $[0;\beta]$ حيث $\beta=\int_0^1 e^{t^2}dt$ 0.5

2- ليكن F^{-1} التقابل العكسي للدالة F

لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع: $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

أ) بين أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة نهايتها $\ell=\frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)dt$ 0.5

ب) بين أن $\ell=\frac{1}{\beta}\int_0^1 u\,e^{u^2}du$ (يمكنك استعمال طريقة تغيير المتغير بوضع $u=F^{-1}(t)$) 0.5

ج) استنتج أن: $\ell=\frac{e-1}{2\beta}$ 0.5

التمرين3: (3.5 نقطة)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z

$$\left(E_\alpha\right):\ z^2-2iz+\alpha=0 \quad \text{حيث} \quad \alpha\in\mathbb{C}$$

الجزء I :

1- أ) بين أن مميز المعادلة $\left(E_\alpha\right)$ هو $\Delta=-4(1+\alpha)$ 0.25

ب) حدد مجموعة قيم α التي من أجلها تقبل المعادلة $\left(E_\alpha\right)$ حلين مختلفين في المجموعة $\mathbb{C}$ 0.25

2- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة $\left(E_\alpha\right)$

حدد z_1+z_2 و z_1z_2 0.5

الجزء II :

لتكن Ω و M_1 و M_2 النقط ذات الألحاق على التوالي α و z_1 و z_2

1- نفترض أن $\alpha=m^2-2m$ حيث $m\in\mathbb{R}$

أ) حدد z_1 و z_2 بدلالة m 0.5

ب) استنتج أن النقط O و M_1 و M_2 مستقيمية. 0.25

2- نفترض أن النقط O و M_1 و M_2 غير مستقيمية.

أ) بين أن $\frac{z_1}{z_2}$ تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان $Re\left(z_1\overline{z_2}\right)=0$ — 0.25

ب) بين أن: $\left|z_1-z_2\right|^2=\left|z_1+z_2\right|^2-4\,Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$ — 0.5

ج) استنتج أن $\frac{z_1}{z_2}$ تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان $\left|z_1-z_2\right|=2$ — 0.25

3- أ) بين أن: $\left(z_1-z_2\right)^2=\Delta$ — 0.25

ب) حدد المجموعة Γ للنقط Ω بحيث يكون المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في O — 0.5

<u>التمرين4</u>: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية غير تبادلية صفرها المصفوفة $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ و وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ قانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي:

$$\forall\left((a,b),(c,d)\right)\in\left(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\right)^2\ ;\ (a,b)T(c,d)=\left(a\overline{d}+c\,,\,bd\right)$$

($\overline{d}$ هو مرافق العدد العقدي d)

1- أ) تحقق أن $(i,2)T(1,i)=(2,2i)$، ثم احسب $(1,i)T(i,2)$ — 0.5

ب) استنتج أن القانون T غير تبادلي في $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ — 0.25

2- بين أن القانون T تجميعي في $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ — 0.5

3- تحقق أن $(0,1)$ هو العنصر المحايد للقانون T في $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ — 0.25

4- أ) تحقق أن $\forall(a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\ ;\quad (a,b)T\left(-\frac{a}{\overline{b}}\,,\,\frac{1}{b}\right)=(0,1)$ — 0.5

ب) بين أن $\left(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\,,\,T\right)$ زمرة غير تبادلية. — 0.5

5- أ) بين أن $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ مستقر بالنسبة لقانون التركيب الداخلي T — 0.5

ب) بين أن $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\,,\,T\right)$ — 0.5

التمرين5: (3 نقط)

ليكن p و q عددين أوليين مختلفين و r عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع p و مع q

1 | 1- أ) بين أن p يقسم $r^{p-1}-1$ و أن q يقسم $r^{q-1}-1$

0.5 | ب) استنتج أن p و q يقسمان $r^{(p-1)(q-1)}-1$

0.5 | ج) بين أن pq يقسم $r^{(p-1)(q-1)}-1$

1 | 2- حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $2024^{192}x \equiv 3 \quad [221]$ (نعطي: $221=13\times 17$)

انتهى