الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2018

-الموضوع-

NS24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات
والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : "أ" و " ب "	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالبنيات الجبرية..............................(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالحسابيات..................................(3 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالأعداد العقدية............................(3.5 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل....................................(7.5 ن)
- التمرين 5 يتعلق بالتحليل....................................(2.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين 1: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(C,+,\times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(R),+,\times)$ حلقة واحدية، صفرها المصفوفة المنعدمة $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(M_2(R),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

لكل زوج (x,y) من $\mathbf{R}^2$ نضع : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbf{R}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(R),+)$ 0.25

2- أ) بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(R),+,.)$ 0.25

ب) نضع $J=M(0,1)$. بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$ 0.5

3- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(R),\times)$ 0.5

ب) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية. 0.5

4- ليكن j التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو $M_2(R)$ المعرف بما يلي:

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})\ ;\ j\,(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y&2y\\-y&x-y\end{pmatrix}$$

أ) بين أن j تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(R),\times)$ 0.5

ب) نضع $E^*=E-\{O\}$. بين أن: $j\,(\mathbb{C}^*)=E^*$ 0.5

ج) استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية. 0.25

5- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي. 0.25

التمرين 2: (3 نقط)

ليكن p عددا أوليا بحيث: $p=3+4k$ $(k\in N^*)$

1- بين أن لكل عدد صحيح نسبي x ، إذا كان $x^2\equiv1\ [p]$ فإن $x^{p-5}\equiv1\ [p]$ 0.5

2- ليكن x عددا صحيحا نسبيا يحقق: $x^{p-5}\equiv1\ [p]$

أ) بين أن x و p أوليان فيما بينهما. 0.5

ب) بين أن: $x^{p-1}\equiv1\ [p]$ 0.5

ج) تحقق أن: $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$ 0.5

د) استنتج أن: $x^2\equiv1\ [p]$ 0.5

3- حل في ¢ المعادلة : $x^{62}\equiv1\ [67]$ 0.5

التمرين 3: (3.5 نقطة)

ليكن m عددا عقديا.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية □ المعادلة (E_m) ذات المجهول z :

$$z^2+(im+2)z+im+2-m=0$$

1- أ) تحقق أن $\Delta=(im-2i)^2$ هو مميز المعادلة (E_m) — 0,25

ب) إعط حسب قيم العدد m مجموعة حلول المعادلة (E_m) — 0,5

2- من أجل $m=i\sqrt{2}$، اكتب حلي المعادلة (E_m) على الشكل الأسي. — 0,5

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و Ω و M و M' ذات الألحاق على التوالي $a=-1-i$ و $\omega=i$ و m و $m'=-im-1+i$

1- ليكن R الدوران الذي زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$ و يحول M إلى M'.

أ) تحقق أن Ω هو مركز الدوران R — 0.25

ب) حدد b لحق النقطة B التي تحقق : $A=R(B)$ — 0.5

2- أ) تحقق أن: $m'-a=\dfrac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$ — 0,5

ب) استنتج أن النقط A و M و M' تكون مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط A و B و Ω و M متداورة. — 0,5

ج) بين أن مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و M و M' مستقيمية هي دائرة يجب تحديد مركزها و شعاعها. — 0,5

التمرين 4: (7.5 نقطة)

الجزء I :

1- أ) بين أن: $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=x-\ln(1+x)$; $(\forall x\in]0,+\infty[)$ — 0.5

ب) باستعمال تغيير المتغير : $u=t^2$ بين أن:

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}du \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$$ — 0.5

ج) استنتج أن: $\dfrac{1}{2(1+x)}\le\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\le\dfrac{1}{2}$; $(\forall x\in]0,+\infty[)$ — 0.5

2- حدد : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ — 0.25

الجزء II :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) \ ; \ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.25 | 1- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0

0.5 | ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 (يمكن استعمال نتيجة السؤال I-2).

0.75 | ج) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 | 2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم تحقق أن:

$$(\forall x\in]0,+\infty[) \ ; \quad f'(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

0.25 | ب) استنتج أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

0.25 | ج) تحقق أن: $f([0,+\infty[)=[1,+\infty[$

0.5 | 3- مثل مبيانيا المنحنى (C) (يتم إنشاء نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الأفصول 0).

الجزء III :

1- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=f(x)-x$

0.5 | أ) بين أن: $(\forall x\in]0,+\infty[) \ ; \quad 0\leq f'(x)\leq \dfrac{1}{2}$

0.5 | ب) استنتج أن الدالة g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ ثم بين أن: $g(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$

0.25 | ج) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,+\infty[$

2- ليكن a عددا حقيقيا من المجال $]0,+\infty[$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0=a$ و $u_{n+1}=f(u_n)$; $(\forall n\in \mathbb{N})$

0.25 | أ) بين أن: $(\forall n\in \mathbb{N}) \ ; \ u_n>0$

0.5 | ب) بين أن: $(\forall n\in \mathbb{N}) \ ; \quad |u_{n+1}-\alpha|\leq \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.5 | ج) بين بالترجع أن: $(\forall n\in \mathbb{N}) \ ; \quad |u_n-\alpha|\leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|$

0.25 | د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تؤول إلى α

التمرين 5: (2.5 نقطة)

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbf{R}$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$

0.5 1- بين أن F متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbf{R}$

0.5 2- أ) بين أن: $F(x)\geq x \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

0.5 ب) بين أن F فردية ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

0.5 ج) بين أن F تقابل من $\mathbf{R}$ نحو $\mathbf{R}$

0.5 د) بين أن دالة التقابل العكسي G للدالة F قابلة للاشتقاق في 0 ثم احسب $G'(0)$

انتهى