★★

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2017
- الموضوع -

NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل	9

- **مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.**
- **يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.**
- **يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.**

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية..............(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية..............(3.5 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات..................(3 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.......................(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها
لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3,5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها المصفوفة $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

نضع: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ و لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ، $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة $E=\{M(a,b)/\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

0,5 | 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}),+)$

0,5 | 2- نعرف على $M_3(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي " T " بما يلي:

$$(\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4)\qquad M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)\ ;$$

تحقق أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),\mathrm{T})$

3- ليكن φ التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو E الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a+ib$ (حيث: $(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)$ بالمصفوفة $M(a,b)$ من E

0,75 | أ) تحقق أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو (E,T) و أن $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ حيث: $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

0,75 | ب) استنتج أن (E^*,T) زمرة تبادلية ينبغي تحديد عنصرها المحايد J

0,5 | 4- أ) بين أن قانون التركيب الداخلي " T " توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي " + " في E

0,5 | ب) استنتج أن $(E,+,\mathrm{T})$ جسم تبادلي.

التمرين الثاني: (3,5 نقط)

ليكن m عددا عقديا **غير منعدم**.

الجزء الأول:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):\ \ 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

0,5 | 1- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta=(2im)^2$

0,5 | 2- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

نفترض أن: $m\in\mathbb{C}\setminus\{0,1,i\}$ ونضع: $z_1=\dfrac{1+i}{2}(m+1)$ و $z_2=\dfrac{1-i}{2}(m+i)$

نعتبر النقط A و B و M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي 1 و i و m و z_1 و z_2

0,25 | 1-أ) تحقق أن: $z_1=iz_2+1$

0,5 ب) بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $\omega=\frac{1+i}{2}$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

0,5 2- أ) تحقق أن : $\frac{z_2-m}{z_1-m}=i\frac{m-1}{m-i}$

0,5 ب) بين أنه إذا كانت النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية فإن M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[AB]$

0,75 ج) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة . (لاحظ أن: $\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$)

التمرين الثالث:(3 نقط)

نقبل أن 2017 عدد أولي و أن $2016=2^5 3^2 7$

ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5

1- ليكن الزوج (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث: $px+y^{p-1}=2017$

0,25 أ) تحقق أن: $p<2017$

0,5 ب) بين أن: p لا يقسم y

0,75 ج) بين أن: $y^{p-1}\equiv 1\ [p]$ ثم استنتج أن p يقسم 2016

0,5 د) بين أن : $p=7$

1 2- حدد ، حسب قيم p ، الأزواج (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي تحقق : $px+y^{p-1}=2017$

التمرين الرابع: (10نقط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\quad f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \qquad \text{و} \qquad f(0)=0$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

0,25 1-أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

0.5 ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

0.5 ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

0.5 2-أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.25 ب) اعط جدول تغيرات الدالة f

0.75 3-أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها .

0.5 ب) ارسم المنحنى (C).(نأخذ : $f(1)\approx 0,7$ و $4e^{-3}\approx 0,2$)

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

0.25 1- بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0,+\infty[$

0.5 2- أ) باستعمال طريقة المكاملة با لأجزاء بين أن:

$$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\ \int_x^1 e^{\frac{-1}{t}}dt=e^{-1}-xe^{\frac{-1}{x}}-\int_x^1\frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt$$

0.25 ب) حدد : $\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt$ لكل x من المجال $\left]0,+\infty\right[$

0.5 ج) بين أن: $\int_0^1 f(x)dx=e^{-1}$

0.5 3- احسب بالسنتيمتر مربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلات: $x=0$ و $x=2$ و $y=0$

4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_n=F(n)-F(n+2)$

0.5 أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال $\left]n,n+2\right[$ بحيث: $u_n=2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$

0,25 ب) بين أن: $2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\leq u_n\leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$ $\left(\forall n\in N^*\right)$

0.25 ج) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

الجزء الثالث:

0.5 1-أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعا وحيد a_n بحيث: $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$

0,25 ب) بين أن المتتالية العددية $(a_n)_{n\geq 1}$ تزايدية.

0,25 ج) تحقق أن: $\forall n\in N^*\ :\ -\frac{1}{a_n}+ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=-\frac{1}{n}$

0,25 2-أ) بين أن: $\forall t\in[0,+\infty[\ :\ 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$

0,5 ب) بين أن: $\forall x\in[0,+\infty[\ :\ -\frac{x^2}{2}\leq -x+ln(1+x)\leq-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

3- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4

0.5 أ) تحقق أن: $a_4\geq 1$ ثم استنتج أن: $a_n\geq 1$ (نقبل أن : $e^{\frac{3}{4}}\geq 2$)

0.5 ب) بين أن: $1-\frac{2}{3a_n}\leq\frac{2a_n^2}{n}\leq 1$ (يمكنك استعمال السؤالين 1-ج) و 2- ب) من الجزء الثالث)

0.5 ج) بين أن: $\sqrt{\frac{n}{6}}\leq a_n$ (يمكنك استعمال السؤالين 3 -أ) و 3-ب)) ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

0.5 د) حدد : $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$

انتهى