

الصفحة
1
4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2016
- الموضوع -

NS 24

ROYAUME DU MAROC
ROYAUME DU MAROC
ROYAUME DU MAROC



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم
والإمتحانات والتوجيه
46084

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها
لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي.

لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ نضع: $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ و $E = \{M(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}), +)$ 0.5

2- تحقق أن: 0.5

$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2) : M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$

3- نضع $E^* = E - \{M(0, 0)\}$ ونعتبر التطبيق: $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow E$ الذي يربط العدد العقدي $z = x + iy$ بالمصفوفة

$M(x, y)$ من E ، حيث الزوج (x, y) من \mathbb{R}^2

أ) بين أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E, \times) 0.25

ب) استنتج أن (E^*, \times) زمرة تبادلية وأن عنصرها المحايد هو $M(1, 0)$ 0.75

4- بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي. 0.5

5- نضع $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

أ) احسب $A \times M(x, y)$ من أجل $M(x, y)$ عنصر من E 0.5

ب) استنتج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل ممتلا في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ 0.5

التمرين الثاني: (3 نقط)

الجزء الأول: ليكن (a, b) عنصرا من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث العدد الأولي 173 يقسم $a^3 + b^3$

1- بين أن: [173] $a^{171} \equiv -b^{171}$ (لاحظ أن: $171 = 3 \times 57$) 0.25

2- بين أن: 173 يقسم a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b 0.25

3- نفترض أن 173 يقسم a . بين أن 173 يقسم $a + b$ 0.25

4- نفترض أن 173 لا يقسم a

أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: [173] $a^{172} \equiv b^{172}$ 0.5

ب) بين أن: [173] $a^{171}(a + b) \equiv 0$ 0.5

ج) استنتج أن 173 يقسم $a + b$ 0.5

الجزء الثاني: نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة التالية: $(E) x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$

ليكن (x, y) عنصرا من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حلا للمعادلة (E) انضع: $x + y = 173k$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

1- تحقق أن: $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$ 0.25

2- بين أن: $k = 1$ ثم حل المعادلة (E). 0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و منظم و موجه (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى العقدي بحيث النقط O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى و غير مستقيمة.

ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق العلاقة: $z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$

1- (أ) بين أن: $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$ 0.5

(ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2 0.5

2- بين أنه إذا كانت $z_2 = \overline{z_1}$ فإن M تنتمي إلى المحور الحقيقي. 0.5

3- نفترض أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مركزه O و قياس زاويته α حيث α ينتمي إلى $]0, \pi[$

(أ) احسب z_2 بدلالة z_1 و α 0.5

(ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى واسط القطعة $[M_1, M_2]$ 0.5

4- ليكن θ عددا حقيقيا مغلوما من $]0, \pi[$

نفترض أن z_1 و z_2 هما حلا للمعادلة: $6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$

(أ) بدون حساب z_1 و z_2 تحقق أن: $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$ 0.5

(ب) اعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة θ . 0.5

التمرين الرابع: (7 نقط)

الجزء الأول:

1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعاً x يوجد عدد حقيقي 0.5

θ محصور بين 0 و x بحيث: $e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$

2- استنتج أن:

(أ) $(\forall x > 0) ; 1 - x < e^{-x}$ 0.25

(ب) $(\forall x > 0) ; x + 1 < e^x$ 0.25

(ج) $(\forall x > 0) ; 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$ 0.25

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $f(0) = 1$ و $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ إذا كان $x > 0$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

0.5 (أ-1) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

0.5 (ب) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.25 (أ-2) بين أن: $(\forall x \geq 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2-أ) من الجزء الأول)

0.5 (ب) استنتج أن: $(\forall x \geq 0) \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

0.5 (أ-3) تحقق أن: $(\forall x > 0) \quad \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} f(x)$

0.75 (ب) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها.

0.75 (أ-4) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ وأن $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$

0.5 (ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2-ب) من الجزء الأول)

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 > 0$ و $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$ لكل عدد صحيح طبيعي n

0.5 1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: $u_n > 0$

0.5 2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2-ج) من الجزء الأول)

0.5 3- بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة: $\ln(f(x)) = x$ ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

التمرين الخامس: (3 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $I =]0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$

0.5 (أ-1) أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من I

0.5 (ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I واحسب $F'(x)$ لكل x من I .

0.25 (ج) بين أن الدالة F تزايدية قطعا على المجال I

0.5 (أ-2) باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع: $u = \sqrt{e^t - 1}$ ، بين أنه لكل x من I لدينا:

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

0.5 (ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

0.25 (أ-3) بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده.

0.5 (ب) حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F .

انتهى