



Exercice n° 1:(5pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n - 1$ pour tout n de \mathbb{N}

0.5 1. Calculer u_1 et u_2

1 2.a. Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n > -\frac{5}{3}$

0.75 2.b. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{5}\left(u_n + \frac{5}{3}\right)$, puis en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

0.5 2.c. Dire pourquoi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

3. On pose pour tout n de \mathbb{N} : $v_n = u_n + \frac{5}{3}$

0.5 3.a. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

0.25 3.b. Calculer v_0

0.5 3.c. Donner l'expression de v_n en fonction de n

0.5 3.d. En déduire que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n = \frac{20}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{5}{3}$

0.5 3.e. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice n° 2 :(3pts)

Une urne contient trois boules vertes numérotées 1 ; 2 ; 3 , trois boules rouges numérotées 1 ; 2 ; 3 et trois boules blanches numérotées 1 ; 2 ; 3 (Les neufs boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « Les trois boules tirées portent le même numéro »

B : « Les trois boules tirées sont de couleurs deux à deux différentes »

0.75 1. Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$

0.75 2. Calculer $p(B)$

0.75 3. Montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{28}$

0.75 4. En déduire $p(A \cup B)$

Exercice n° 3 :(8pts)

Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $D =]0; e[\cup]e; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$$

2 1.a. En remarquant que pour tout $x \neq 1$, $h(x) = \frac{1 + \frac{1}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}}$, montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = 1$ et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$



2 1.b. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} h(x) = -\infty$ et que $\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} h(x) = +\infty$

1 2.a. Montrer que pour tout x de D : $h'(x) = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$

1.25 2.b. Calculer $h\left(\frac{1}{e}\right)$ et donner le signe de $h'(x)$, puis dresser le tableau de variations de h

2.c. Déterminer, à l'aide du tableau de variations :

1 i. l'ensemble des solutions de l'inéquation : $h(x) \leq 0$

0.75 ii. l'image de l'intervalle $]0; e[$ par la fonction h

Exercice n°4:(4pts)

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies respectivement sur \mathbb{R} et sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = \ln x$

0.75 1. Calculer $g(1)$, $f(1)$ et $f(3)$

2. Ci-dessous, (C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 2.a. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^2 \ln x dx = 2\ln 2 - 1$

1.25 2.b. Calculer $\int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx$

1 2.c. En déduire que l'aire de la partie hachurée est égale à $\left(2\ln 2 - \frac{1}{3}\right) u.a$

