

Cours : La dérivation

Contenu	Capacités attendues
<ul style="list-style-type: none">▪ Dérivabilité d'une fonction en x_0 - Nombre dérivé▪ <i>Fonction dérivée</i>▪ <i>Application de la dérivée d'une fonction</i>	<ul style="list-style-type: none">• Reconnaître que le nombre dérivé d'une fonction en un point est le coefficient directeur de la tangente au graphe de la fonction au point d'abscisse correspondante• Dériver les fonctions polynomiales et les fonctions rationnelles.• Déterminer l'équation de la tangente au graphe d'une fonction en un point et la construire• Déterminer les variations (la monotonie) d'une fonction à partir de l'étude du signe de sa dérivée• Résoudre des problèmes d'application portant sur les valeurs minimales et maximales• Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variations ou de sa représentation graphique.

I. Dérivabilité d'une fonction en x_0 - Nombre dérivé

a. Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$

- ✓ On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

- ✓ Le nombre l est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et noté $f'(x_0)$

❖ Interprétation graphique :

- ✓ Le nombre $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente à (Cf) au point $M(x_0; f(x_0))$
- ✓ Si la fonction f est dérivable en x_0 alors l'équation de la droite tangente à (Cf) au point $M(x_0; f(x_0))$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

b. Exemple

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} telle que : $f(x) = 5x^2$

- ✓ Etudions la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

$$f(x_0) = f(1) = 5 \times 1^2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5(x + 1) = 5(1 + 1) = 10$$

Donc f est dérivable en 1 est $f'(1) = 10$

✓ Interprétation graphique :

L'équation de la tangente à (Cf) en $M(1; 5)$ est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\Rightarrow y = 10(x - 1) + 5$$

$$\Rightarrow y = 10x - 5$$

c. **Exercice :** Etudier dans chacun des cas suivants la dérivabilité de la fonction f et donner une interprétation graphique du résultat

1) $f(x) = 3x^2$ et $x_0 = -1$

2) $f(x) = 2x^2 - 5$ et $x_0 = 2$

3) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et $x_0 = 0$

4) $f(x) = x^2 + 3x - 5$ et $x_0 = 1$

II. Fonction dérivée

1) Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle - fonction dérivée

a. Définition et propriété

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- ✓ On dit que la fonction f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout x_0 de I
- ✓ La fonction qui relie chaque x de I à son image $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f et notée :

$$f': I \rightarrow R$$

$$x \rightarrow f'(x)$$

Dérivées des fonctions usuelles :

La fonction f	Sa dérivée f'
$f(x) = k$ avec $k \in R$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b. Exercice

Déterminer f' dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = -17 ; f(x) = 2x - 5 ; f(x) = -3x + 7 ; f(x) = x^2 ; f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^2 + 5x ; f(x) = x^3 - x^2 ; f(x) = 3x^2 + 5x - 1 ; f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x$$

$$f(x) = 2x^3 + \sqrt{x} ; f(x) = 5x^3 - \frac{1}{x} ; f(x) = 4x^2 + 5\sqrt{x} - 1 ; f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$$

2) Opérations sur les fonctions dérivées

a. Propriété

Soient f et g deux fonctions numériques dérivables sur un intervalle I avec $g \neq 0$ sur I et soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $f + g ; f \times g ; \frac{1}{g} ; \frac{f}{g} ; f^n$ et kf sont dérivables sur I

et on a :

La fonction	Sa dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$f \times g$	$f' \times g + g' \times f$
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$
f^n	$nf^{n-1}f'$
kf	kf'

b. Exercice

Déterminer f' dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = 7\sqrt{x} + \frac{3}{x} ; f(x) = x\sqrt{x} ; f(x) = x^5\sqrt{x} ; f(x) = x^2(3x - 4)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}; f(x) = \frac{1}{3x^2 + 2x + 7}; f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 - 1}; f(x) = \frac{5x + 3}{2x - 4}$$

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 + 2}; f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{7x + 5}; f(x) = (5x^2 + 4x)^2; f(x) = (3x^2 + 7x - 5)^3$$

$$f(x) = (2x^3 + 3x^2 + 7x)^5; f(x) = 4(x^2 + 5\sqrt{x} - 1); f(x) = -7\left(3x^5 + \frac{1}{x}\right)$$

III. Applications de la dérivée d'une fonction

1) Signe de f' et variations de f

a. Propriété

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I : f'(x) \geq 0$
- f est décroissante $\Leftrightarrow \forall x \in I : f'(x) \leq 0$
- f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I : f'(x) = 0$

b. Application

Déterminer f' et étudier les variations de f dans chacun des cas suivants :

- 1) $f(x) = x^2 + 6x - 5$
- 2) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$
- 3) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
- 4) $f(x) = x^3 - x^2 - x$
- 5) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$
- 6) $f(x) = \frac{3x+1}{2x-4}$

2) Extrémums d'une fonction dérivable sur un intervalle

a. Propriété

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$

- Si $f(x_0)$ est un extrémum de f alors $f'(x_0) = 0$
- Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe au voisinage de x_0 alors $f(x_0)$ est un extrémum de f

b. Application

Déterminer f' , dresser le tableau de variations de f et en déduire les extrémums de f dans chacun des cas suivants :

- 1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$
- 2) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$
- 3) $f(x) = x^3 - x^2 + 5$

$$4) f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Exercices

Exercice 1 : On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

Son **tableau de variations** est donné ci-dessous :

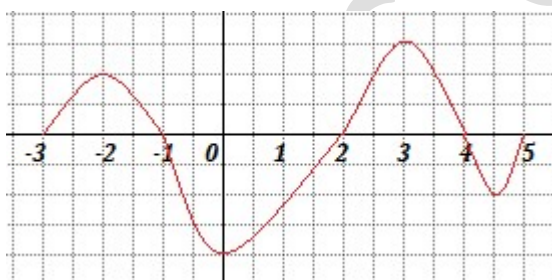
x	-2	-1	0	1	2	3	4
variations de f							

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles :

- $f(x) > 0$
- $f(x) = 0$
- $f(x) < 0$

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$

Exercice 2 : On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 5]$



1. Donner les valeurs de x pour lesquelles :

- $f(x) = 0$
- $f(x) > 0$
- $f(x) < 0$

2. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$

3. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leq 0$

4. Compléter le tableau de signe de la fonction f sur $[-3 ; 5]$.

Exercice 3 : Un agriculteur dispose de 40 mètres de grillage pour clôturer un terrain rectangulaire contre un mur droit.

Le mur constitue un côté du rectangle, donc le grillage est utilisé pour les trois autres côtés.

On note :

- x la largeur du terrain (en mètres), perpendiculaire au mur
- y la longueur du terrain le long du mur.

1. Exprimer y en fonction de x .
2. Montrer que l'aire $A(x)$ du terrain s'écrit sous la forme

$$A(x) = 40x - 2x^2$$

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction A .
4. Calculer la dérivée $A'(x)$.
5. Étudier le signe de $A'(x)$ et dresser le tableau de variations de $A(x)$.
6. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale.
7. Calculer l'aire maximale correspondante.
8. En déduire les dimensions du terrain pour lesquelles l'aire est maximale.

Exercice 4 : Une entreprise fabrique des objets.

Le coût total de production, en centaines de dirham, est donné par la fonction :

$$C(x) = x^2 - 6x + 13$$

où x représente le nombre d'objets fabriqués, avec $x \in [0 ; 6]$.

1. Calculer la dérivée de la fonction C .
2. Étudier le signe de $C'(x)$ sur l'intervalle $[0;6]$.
3. Dresser le tableau de variations de C .
4. Déterminer la valeur de x pour laquelle le coût est minimal.
5. Calculer le coût minimal.
6. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.