



Contenu	Capacités attendues
<ul style="list-style-type: none"><li>Fonction numérique et son domaine de définition</li><li>Représentation graphique d'une fonction numérique</li><li>Egalité de deux fonctions</li><li>Fonction paire et fonction impaire</li><li>Fonction majorée, Fonction minorée et fonction bornée</li><li>Variations d'une fonction</li><li>Maxima et minima d'une fonction</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>Comparer deux expressions en utilisant différentes techniques</li><li>Déduire les variations d'une fonction ou ses valeurs maximale et minimale à partir de son représentation graphique ou de son tableau de variations</li><li>Associer la lecture et l'interprétation de certaines représentations graphiques avec certaines propriétés des fonctions.</li></ul>

## I. Fonction numérique et son domaine de définition

### a. Définitions

- On appelle fonction numérique  $f$  toute relation de  $R$  ou d'une partie  $E$  de  $R$  dans  $R$  que l'on note :

$$f : E \subseteq R \rightarrow R$$
$$x \rightarrow f(x)$$

- chaque élément  $x$  de  $E$  a au plus une image  $y$  dans  $R$  et on écrit :

$$f(x) = y$$

$x$  s'appelle l'antécédent de  $y$  par  $f$ .

$y$  s'appelle l'image de  $x$  par  $f$ .

- Soit  $f$  une fonction numérique. Le domaine de définition de  $f$  est l'ensemble des nombres réels qu'on peut calculer leurs images par  $f$ , et on le note  $D_f$  et on a :  $D_f = \{x \in R / f(x) \in R\}$

### b. Exercice :

- On considère la fonction numérique définie par :  $f(x) = 3x - 7$

Déterminer  $D_f$

Déterminer les images de 0, 2 et 5

2) On considère la fonction définie par :  $g(x) = \frac{3x-1}{2+x}$

Déterminer  $D_g$

Déterminer les images de 0, 2 et 5

3) Déterminer  $D_f$  dans chacun des cas suivants

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 7$$

$$f(x) = \frac{5x - 7}{x + 3}$$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4}$$

$$f(x) = \frac{5x - 7}{x^2 + 2x - 3}$$

$$f(x) = \sqrt{4x - 2}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

## II. Représentation graphique d'une fonction numérique

### a. Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, I, J)$  Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $D_f$ .

- La représentation graphique de la fonction  $f$  est constituée de tous les points  $M(x, y)$  du plan tels que  $x \in D_f$  et  $y = f(x)$ .
- La représentation graphique de la fonction  $f$  s'appelle aussi courbe de  $f$  et se note  $C_f$ .  $y = f(x)$  est appelée équation de  $(C_f)$

b. **Exercice** : Représenter graphiquement la fonction  $f$  définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; \text{si } x < -2 \\ -3 & ; \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ -2x - 1 & ; \text{si } x > 1 \end{cases}$$

## III. Egalité de deux fonctions

### a. Définition

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques et  $D_f$  et  $D_g$  leurs domaines de définitions respectifs.

On dit que  $f$  et  $g$  sont égales et on écrit  $f = g$  si :

$$D_f = D_g \text{ et } f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \text{ de } D_f$$

**Exercice** : Montrer que  $f = g$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$  et  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$$2) f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x}$$

## IV. Fonction paire et fonction impaire

### a. Définition et propriété

Soit  $f$  une fonction numérique et  $Df$  son domaine de définition.

- On dit que  $f$  est une fonction paire si et seulement si :

$$\forall x \in Df : -x \in Df \text{ et } f(-x) = f(x)$$

- On dit que  $f$  est une fonction impaire si et seulement si :

$$\forall x \in Df : -x \in Df \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

Interprétation graphique :

- Si  $f$  est paire alors  $Cf$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (OY)
- Si  $f$  est impaire alors  $Cf$  est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

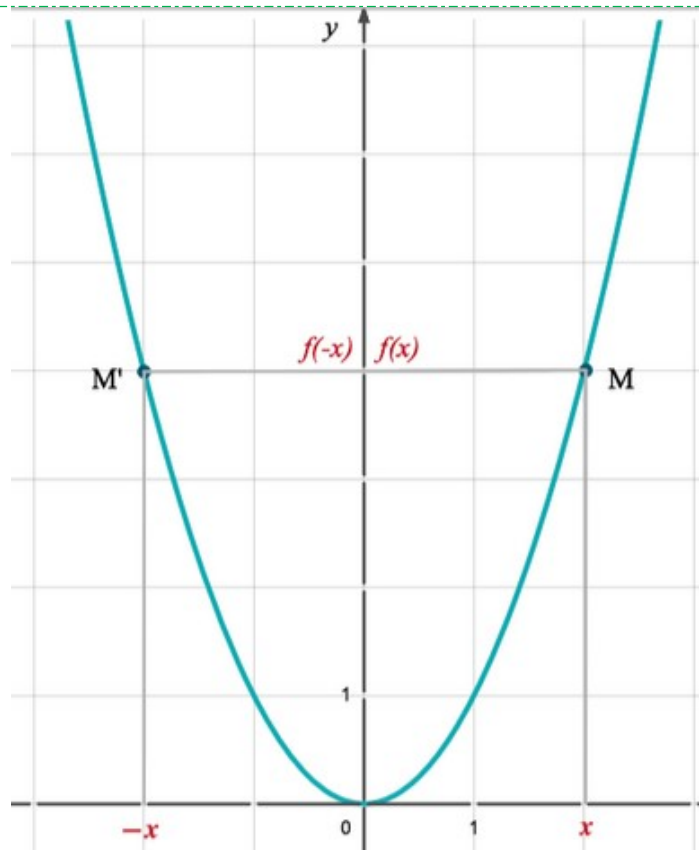
### b. Exemples :

1) Soit la fonction  $f(x) = x^2$

$$\text{On a : } Df = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

donc  $f$  est une fonction paire

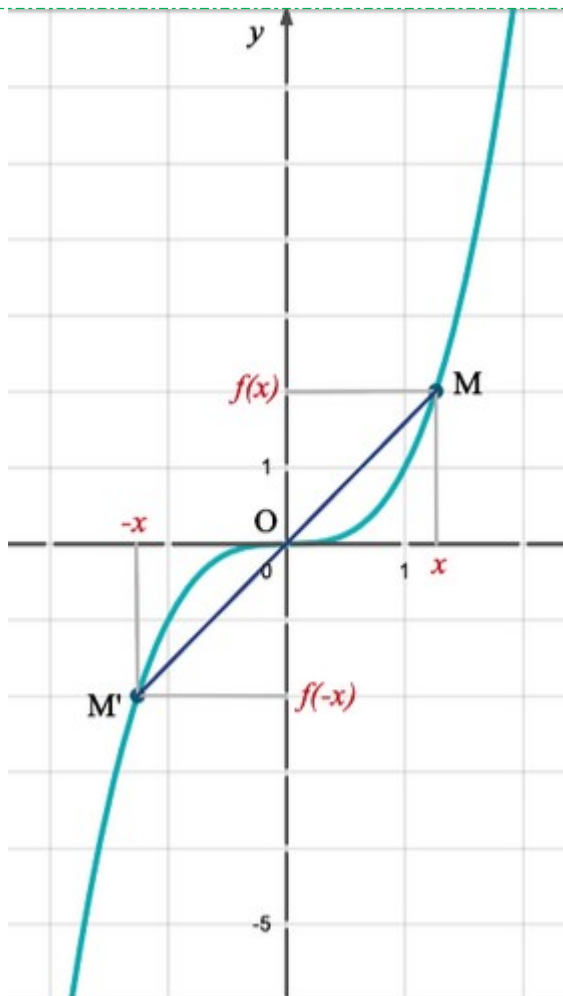


2) Soit la fonction  $f(x) = x^3$

On a :  $Df = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

donc  $f$  est une fonction est impaire



c. **Applications :** Etudier la parité des fonctions suivantes

$$f(x) = x^2 - 1 ; g(x) = |x| ; h(x) = x^5$$

## V. Fonction majorée, Fonction minorée et fonction bornée

### a. Définitions

Soient  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$  et  $M$  et  $m$  deux réels.

- On dit que  $f$  est une majorée par  $M$  sur  $I$  si :

$$\forall x \in I : f(x) \leq M$$

- On dit que  $f$  est une fonction minorée par  $m$  sur  $I$  si :

$$\forall x \in I : f(x) \geq m$$

- On dit que  $f$  est bornée sur  $I$  s'elle est à la fois majorée et minorée sur  $I$  :

$$\forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

### **b. Exercices :**

1. Soit la fonction  $f(x) = x^2 + 2x + 4$   
montrer que  $f$  est minorée par 3 sur  $\mathbb{R}$
2. Soit la fonction  $f(x) = -x^2 + 2x + 2$   
montrer que  $f$  est majorée par 3 sur  $\mathbb{R}$
3. Soit la fonction  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 
  - 1) Déterminer  $Df$
  - 2) Montrer que  $f$  est majorée par 1 et minorée par 0 sur  $Df$
  - 3) En déduire que  $f$  est bornée

## **VI. Variations d'une fonction**

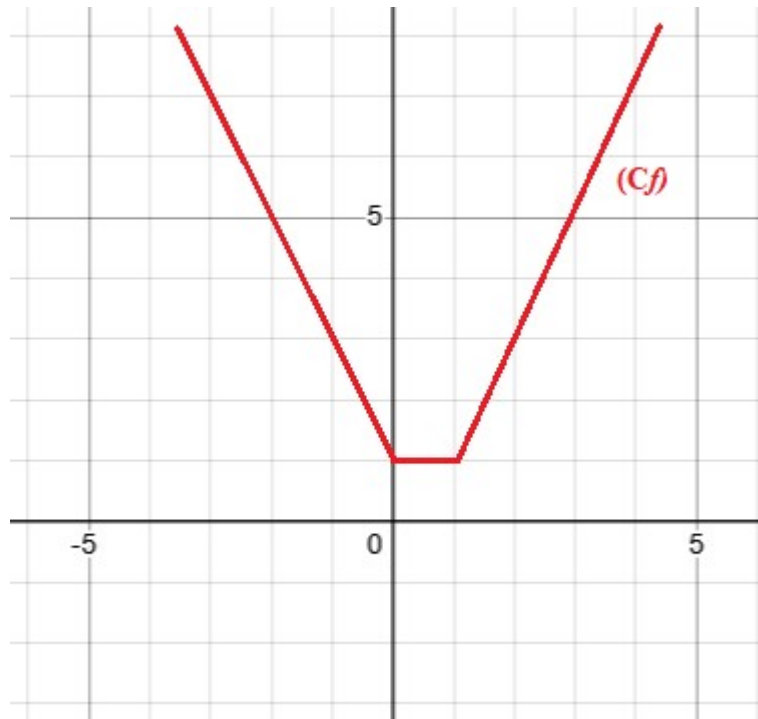
### **a. Définitions**

Soient  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$

- $f$  est croissante sur  $I$  signifie que pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  :  
 $si\ x_1 < x_2\ alors\ f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f$  est strictement croissante sur  $I$  signifie que pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  :  
 $si\ x_1 < x_2\ alors\ f(x_1) < f(x_2)$
- $f$  est décroissante sur  $I$  signifie que pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  :  
 $si\ x_1 < x_2\ alors\ f(x_1) \geq f(x_2)$
- $f$  est strictement décroissante sur  $I$  signifie que pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  :  
 $si\ x_1 < x_2\ alors\ f(x_1) > f(x_2)$
- $f$  est constante sur  $I$  signifie que pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  :  
 $si\ x_1 < x_2\ alors\ f(x_1) = f(x_2)$

**b. Exemple :** Soit la fonction  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si\ x \geq 1 \\ 1 & si\ 0 \leq x < 1 \\ -2x + 1 & si\ x < 0 \end{cases}$

On a  $f$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ , constante sur  $[0; 1]$  et strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$



## ❖ taux de variation d'une fonction

### a. Définition et propriété

Soient  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$

$x_1$  et  $x_2$  de  $I$  avec  $x_1 \neq x_2$

Le nombre réel  $T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$  est appelé taux de variation de  $f$  entre

$x_1$  et  $x_2$  et on a :

- Si  $T \geq 0$  pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  alors  $f$  est croissante sur  $I$
- Si  $T > 0$  pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$
- Si  $T \leq 0$  pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  alors  $f$  est décroissante sur  $I$
- si  $T < 0$  pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$

### b. Application :

Soit la fonction  $f: x \rightarrow x^2 - 8x + 3$

Calculer le taux de variation et étudier la les variations de  $f$  sur les intervalles

$I = ] - \infty; 4]$  et  $J = [4; +\infty[$

## VII. Maxima et minima d'une fonction

### a. Définition et propriété

Soient  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$  et  $M$  et  $m$  deux réels.

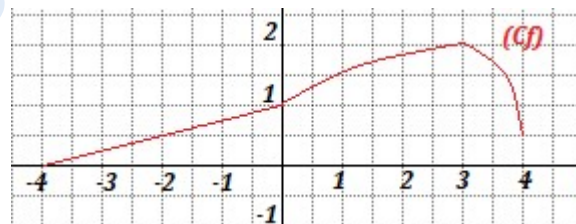
- $M$  est le maximum de la fonction  $f$  sur  $I$  signifie que :  
 $\forall x \in I : f(x) \leq M$  et  $\exists x_0 \in I : f(x_0) = M$
- $m$  est le minimum de la fonction  $f$  sur  $I$  signifie que :  
 $\forall x \in I : f(x) \geq m$  et  $\exists x_0 \in I : f(x_0) = m$

### b. Application :

- 1) Soit la fonction  $f: x \rightarrow x^2 - 4x + 7$ 
  1. Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 3$
  2. Calculer  $f(2)$  et en déduire que 3 est le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
- 2) Soit la fonction  $f: x \rightarrow x + \frac{1}{x}$ 
  1. Montrer que  $\forall x \in ]-\infty; 0[ : f(x) \leq -2$
  2. Montrer que -2 est le maximum de  $f$  sur l'intervalle  $] -\infty; 0[$

### Exercices :

**Exercice 1 :** La courbe ci-dessous représente la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-4, 4]$ .



1. À partir de la courbe déterminer les intervalles où  $f$  est croissante et où elle est décroissante.
2. Identifier les valeurs maximale et minimale de  $f$ .
3. Déterminer  $f(0)$  et  $f(3)$  à partir du graphique.
4. Résoudre graphiquement :
  - 1) Les équations  $f(x) = 0$  et  $f(x) = \frac{1}{2}$
  - 2) Les inéquations :  $f(x) > \frac{1}{2}$  et  $f(x) \leq \frac{1}{2}$

**Exercice 2 :** La fonction  $f$  est définie sur  $[-1; 3]$ . Son tableau de variations est donné ci-dessous :

$x$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$
variations de $f$	$-3$	$2$	$0$	$5$	$1$

1. Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de  $f$
2. Identifier les maximum et minimum de  $f$
3. Déterminer  $f(0)$  et  $f(2)$  à partir du tableau.

www.salimaths.com