Cours : Limite d'une fonction numérique

Contenu	Capacités attendues
▪ *Limite finie et limite infinie d'une fonction au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$* ▪ *Limite finie et limite infinie d'une fonction au voisinage de x_0* ▪ *Opérations sur les limites* ▪ *Limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles*	*Maîtriser le calcul des limites des fonctions polynomiales et des fonctions rationnelles en $\pm\infty$ et en x_0*

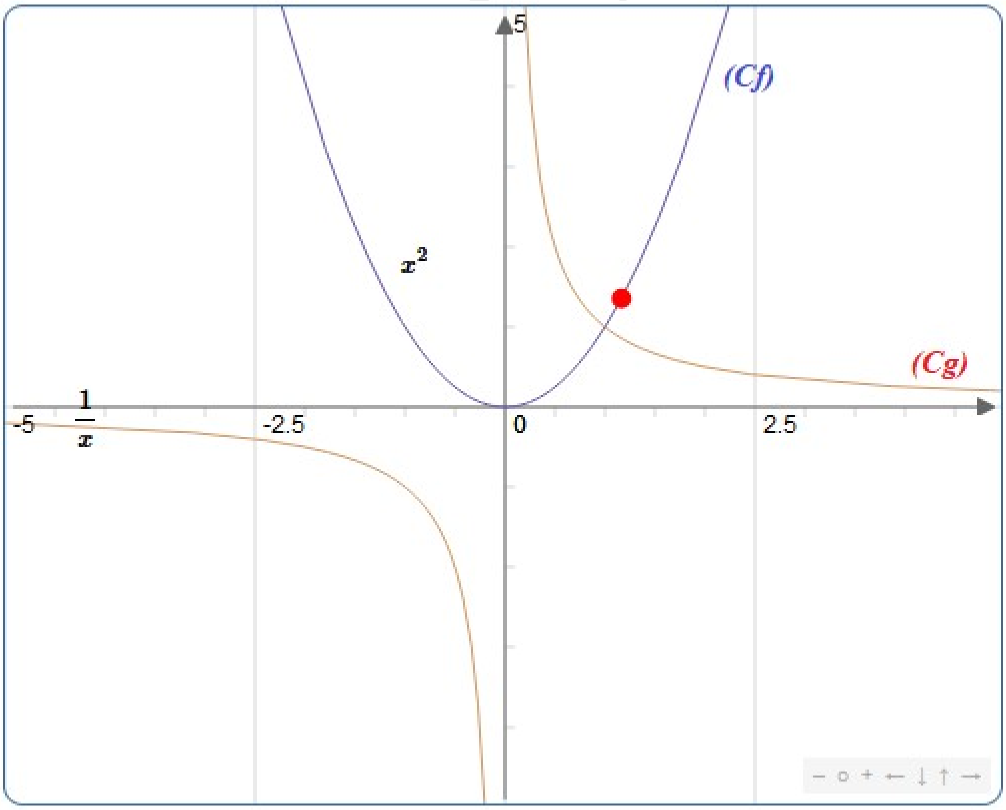
I. Limite finie et limite infinie d'une fonction au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

a. Activité

Considérons les fonctions f et g respectivement définies par :

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x}$$

Les représentations graphiques des deux fonctions comme suit :



On remarque que :

- ***Quand x prend des valeurs positives de plus en plus grands (c-à-d quand x tend vers +∞) l'image $f(x)$ prend aussi des valeurs positives de plus en plus grands (c-à-d $f(x)$ tend vers +∞).***

On dit que la limite de f quand x tend vers +∞ est +∞ et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- *Quand x prend des valeurs négatives de plus en plus grands (c-à-d quand x tend vers -∞) l'image $f(x)$ prend des valeurs positives de plus en plus grands (c-à-d $f(x)$ tend vers +∞)*
  On dit que la limite de f quand x tend vers -∞ est +∞ et on écrit :

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = +\infty$$

- *Quand x prend des valeurs positives de plus en plus grands (c-à-d quand x tend vers +∞) l'image $g(x)$ s'approche de la valeur 0.*
  On dit que la limite de g quand x tend vers +∞ est 0 et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} g(x) = \mathbf{0}$$

- *Quand x prend des valeurs négatives de plus en plus grands (c-à-d quand x tend vers -∞) l'image $g(x)$ s'approche de la valeur 0*
  On dit que la limite de g quand x tend vers -∞ est 0 et on écrit :

$$\lim_{n\to-\infty} g(x) = \mathbf{0}$$

b. <u>Définitions</u>

Soient f une fonction numérique et $l \in R$.

- ✓ *On dit que la limite de f au voisinage de +∞ est +∞ (resp -∞) si l'image $f(x)$ tend vers +∞ (resp -∞) quand x tend vers +∞ et on écrit :*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty \ \left(resp \lim_{n\to+\infty} f(x) = -\infty\right)$$

- ✓ *On dit que la limite de f au voisinage de -∞ est +∞ (resp -∞) si l'image $f(x)$ tend vers +∞ (resp -∞) quand x tend vers -∞ et on écrit :*

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = +\infty \ \left(resp \lim_{n\to-\infty} f(x) = -\infty\right)$$

- ✓ *On dit que la limite de f au voisinage de +∞ (resp -∞) est l si l'image $f(x)$ tend vers l quand x tend vers +∞ (resp -∞) et on écrit :*

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = l \ \left(resp \lim_{n\to-\infty} f(x) = l\right)$$

<u>Limites usuelles</u> : Soit $n \in N$.

salimaths.com

On admet les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \ \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty \ \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

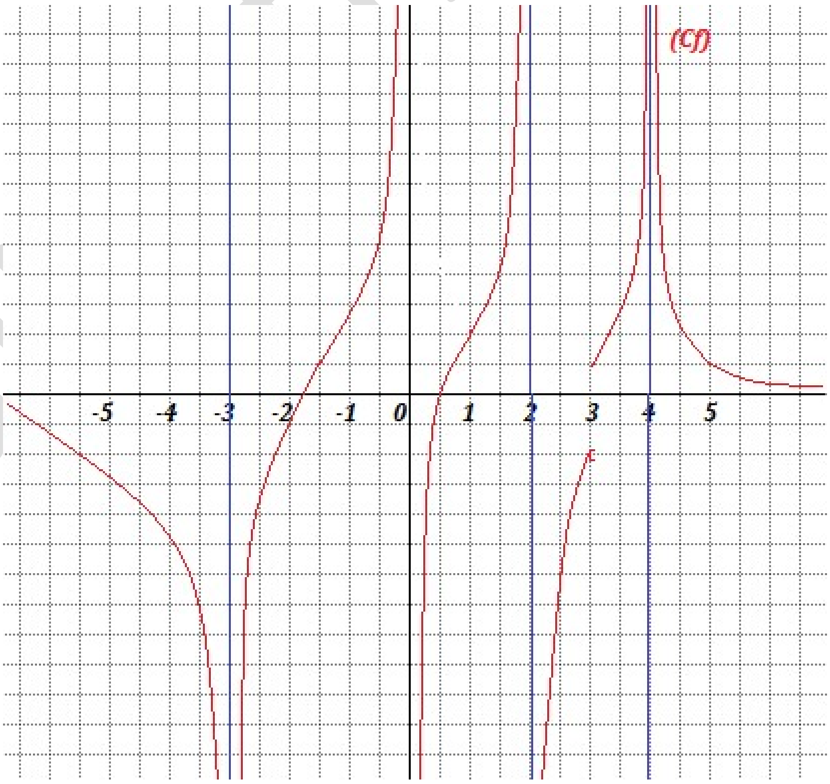
c. <u>Exercice</u> : Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ ; \ \lim_{x\to+\infty} x^3 \ ; \ \lim_{x\to-\infty} x^4 \ ; \ \lim_{x\to-\infty} x^5 \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$$

II. Limite finie et limite infinie d'une fonction au voisinage de x_0

a. <u>Activité</u>

Soit f une fonction numérique et sa représentation graphique comme suit :



Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{\substack{n\to0 \\ x>0}} f(x) \ ; \ \lim_{\substack{n\to0 \\ x<0}} f(x) \ ; \ \lim_{\substack{n\to2 \\ x>2}} f(x) \ ; \ \lim_{\substack{n\to2 \\ x>2}} f(x) \ ; \ \lim_{\substack{n\to3 \\ x>3}} f(x) \ ; \ \lim_{\substack{n\to3 \\ x<3}} f(x)$$

salimaths.com

$$\lim_{x\to 4} f(x)\ ;\ \lim_{x\to -3} f(x)\ ;\ \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$$

b. Définitions

Soient f une fonction numérique et $l \in R$.

- ✓ ***On dit que la limite de f à droite de x_0 est +∞ (resp -∞) si l'image $f(x)$ tend vers +∞ (resp -∞) quand x s'approche de x_0 avec des valeurs supérieures strictement à x_0 et on écrit :***

$$\lim_{\substack{n\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = +\infty \ (resp\ \lim_{\substack{n\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = -\infty)$$

- ✓ ***On dit que la limite de f à droite de x_0 est l si l'image $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 avec des valeurs supérieures strictement à x_0 et on écrit :***

$$\lim_{\substack{n\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = l$$

- ✓ ***On dit que la limite de f à gauche de x_0 est +∞ (resp -∞) si l'image $f(x)$ tend vers +∞ (resp -∞) quand x s'approche de x_0 avec des valeurs inférieures strictement à x_0 et on écrit :***

$$\lim_{\substack{n\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = +\infty \ (resp\ \lim_{\substack{n\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = -\infty)$$

- ✓ ***On dit que la limite de f à gauche de x_0 est l si l'image $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 avec des valeurs inférieures strictement à x_0 et on écrit :***

$$\lim_{\substack{n\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = l$$

<u>Limites usuelles</u> : Soit $n \in N$. On admet les limites suivantes

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty\ ;\ \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty\ ;\ \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & si\ n\ est\ pair \\ -\infty & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

c. <u>Exercice</u> : Calculer les limites suivantes

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^2}\ ;\ \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^3}\ ;\ \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{1}{x-1}\ ;\ \lim_{\substack{x\to 4 \\ x<4}} \frac{1}{x-4}\ ;\ \lim_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

salimaths.com

III. Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions numériques et l et l' deux réels.

1. La somme

lim f	***l***	***l***	***l***	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	***l'***	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim f + g	***l+l'***	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***F.I***

2. Le produit

lim f	***l***	***l>0***	***l>0***	***l<0***	***l<0***	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***0***
lim g	***l'***	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
lim f.g	***l.l'***	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***F.I***

3. Le quotient

lim f	***l***	***l>0***	***l>0***	***l<0***	***l<0***	***l***	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	***0***	∞
lim g	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	∞	***l>0***	***l<0***	***l>0***	***l<0***	***0***	∞
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***0***	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***F.I***	***F.I***

***Application** : Calculer les limites suivantes*

$$\lim_{x\to 1} x^2-5x+1\ ;\ \lim_{x\to 1}(2x+3)(1-5x)\ ;\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x}{3-x}\ ;\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\ ;\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to -\infty} 3x^5+x^2-5x\ ;\ \lim_{x\to +\infty} x^2+5x\ ;\ \lim_{x\to +\infty}(2x+3)(1-5x)\ ;\ \lim_{x\to -\infty} x^2(x-7)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-5}{5x^2+3}\ ;\ \lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-5x}{x^2+7}\ ;\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x-7}{x^2+3}\ ;\ \lim_{x\to -\infty}\frac{-3x^2+1}{x+1}\ ;\ \lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2+1}{x^5+4}$$

IV. Limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles

a. Propriété

Soient f une fonction polynôme et g une fonction rationnelle . On a :

- ✓ $\forall x_0 \in R : lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

salimaths.com

- ***La limite de f au voisinage de l'infini ($+\infty$ et $-\infty$) est la limite du terme du plus grand degré.***
- $\forall x_0 \in D_g : \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$
- ***La limite de g au voisinage de l'infini ($+\infty$ et $-\infty$) est la limite du rapport de ses deux termes du plus grand degré.***

b. <u>Application</u> Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} x^2 - x + 7 \, ; \lim_{x\to 1}(-3x+3)(1-2x) \, ; \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x}{5 - x} \; ; \; \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

$$\lim_{x\to 9} \frac{x - 9}{x^2 - 81} \, ; \lim_{x\to +\infty} -3x^2 + 7x - 1 \, ; \lim_{x\to +\infty} (7x+1)(3-5x) \, ; \lim_{x\to -\infty} x^2(x^5 - 7)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2 - 2}{3x^2 + 1} \; ; \; \lim_{x\to -\infty} \frac{5x^2 - 3x}{2x^2 + 7} \; ; \; \lim_{x\to +\infty} \frac{3x - 7}{x^2 + 1} \; ; \; \lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^2 + 5}{x + 6}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2 - 2}{x^2 - 1} \; ; \; \lim_{x\to -1} \frac{5x^2 - 3x}{x^2 + 1} \; ; \; \lim_{x\to -3} \frac{3x - 7}{x + 3} \; ; \; \lim_{x\to 5} \frac{-x^2 + 5}{x - 5}$$

salimaths.com