

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
 - ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
 - ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3.5 points
Exercice 4	Calculs des probabilités	2.5 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	8 points

- ✓ On désigne par \bar{z} le conjugué du nombre complexe z
 - ✓ \ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n .

- 1) a) Vérifier que $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n . (0.25 pt)
 - b) Montrer par récurrence que $0 < u_n < 2$, pour tout entier naturel n . (0.5 pts)
 - 2) a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n . (0.25 pts)
 - b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire que (u_n) est convergente. (0.5 pts)
 - c) Montrer que $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$, pour tout entier naturel n . (0.5 pts)
 - d) Déduire que $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n$, pour tout entier naturel n . (0.5 pts)
 - e) Déterminer la limite de la suite (u_n) . (0.5 pt)
-

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(0, 3, 3), B(1, 2, 1), C(2, 3, 1)$$

et le vecteur $\vec{n}(1, -1, 1)$. Soit (P) le plan d'équation $x - y + z - 6 = 0$.

- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$ et déduire que les points A, B et C sont non alignés. (0.5 pt)
 - b) Montrer que les plans (ABC) et (P) sont parallèles. (0.25 pt)
 - 2) Soit (S) la sphère telle que : le plan (ABC) est tangent à (S) en A et le plan (P) est tangent à (S) en un point H .
 - a) Calculer la distance du point A au plan (P) et déduire que le rayon de la sphère (S) est $\sqrt{3}$. (0.5 pt)
 - b) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (P) . (0.25 pt)
 - c) Montrer que les coordonnées du point H sont $(2, 1, 5)$. (0.5 pt)
 - d) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) . (0.5 pt)
 - 3) Déterminer les deux points d'intersection de la droite (BH) et la sphère (S) . (0.5 pt)
-

Exercice 3 (3.5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points

$$A, B, C \text{ et } D \text{ d'affixes respectives : } a = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, b = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, c = 1 + a \text{ et } d = \bar{c}$$

- 1) Vérifier que $|a| = 1$ et que $\arg(a) = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ (0.5 pts)
- 2) Vérifier que $\frac{c - d}{c - a} = i$ et déduire que le triangle ACD est isocèle rectangle en C (0.75 pts)
- 3) a) Montrer que $d - a = 1 - i$ et que $b - d = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$ (0.5 pts)

- b) Déduire que les points A , D et B sont alignés. (0.25 pt)
- 4) Soit R la transformation du plan qui transforme chaque point M d'affixe z en M' d'affixe z' tel que $z' = az$.
- a) Vérifier que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle. (0.5 pts)
- b) Vérifier que $ad = c$ et déduire que $R(D) = C$ (0.5 pt)
- c) Montrer que $\arg(c) = \frac{5\pi}{12}[2\pi]$ (0.5 pts)
-

Exercice 4 (2.5 points)

Un sac contient 4 boules blanches et 3 boules noires. (Les boules sont indiscernables au toucher).

Un jeu consiste à tirer successivement et sans remise deux boules du sac.

Les règles du jeu sont comme suit :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on note : +5.
- Si les deux boules tirées sont noires, on note : -5.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, on note : 0.

On considère les événements :

- G : « noter +5 »
- Z : « noter 0 »
- N_1 : « La première boule tirée est noire »
- B_2 : « La deuxième boule tirée est blanche »

- 1) a) Calculer $p(G)$, la probabilité de l'événement G (0.5 pt)
- b) Montrer que la probabilité de l'événement Z est $p(Z) = \frac{4}{7}$ (0.5 pt)
- 2) a) Calculer la probabilité $p(N_1 \cap B_2)$ (0.5 pt)
- b) Montrer que $p(B_2) = \frac{4}{7}$ (0.5 pt)
- c) Déduire la probabilité de « noter 0 » sachant que la deuxième boule tirée est blanche. (0.5 pt)
-

Problème (10 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 2}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Calculer $f(0)$ et $f(\ln 2)$ (0.5 pt)
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (0.5 pt)
- b) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$ puis interpréter géométriquement ce résultat. (0.5 pt)
- 3) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 2}$ (0.25 pt)
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 2}$ puis déduire que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ (0.5 pt)
- c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) - x < 1$ (0.5 pt)

- 4) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^{2x} + 4}{(e^x + 2)^2}$ (0.5 pt)
- b) Déduire que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} . (0.25 pt)
- 5) a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans \mathbb{R} (0.5 pt)
- b) Soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Vérifier que $-1 < \alpha < 0$ et montrer que $e^\alpha = \frac{2(1 + \alpha)}{1 - \alpha}$ (0.5 pt)
- 6) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^2}$ (0.5 pt)
- b) Étudier le signe de $e^x - 2$ sur \mathbb{R} . (0.25 pt)
- c) Déduire que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion que l'on déterminera. (0.5 pt)
- d) Montrer que $y = \frac{1}{2}x + \frac{\ln 2}{2}$ est l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $\ln 2$ (0.5 pt)
- 7) Construire la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . (0.75 pt)
- 8) a) Montrer que $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (0.5 pt)
- b) Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , la droite d'équation $y = x - 1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$ (0.5 pt)