المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2024

RS 22F | الموضوع | SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	4 points
Exercice 3	Limites, dérivabilité et calcul intégral	2 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	11 points

- ✓ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1,1,0)$ et $\Omega(-1,1,-2)$ et le plan (P) d'équation $x+z-1=0$.

1. (a) Vérifier que A est un point du plan (P) et donner un vecteur normal de (P). (0.5 pt)
   (b) Montrer que la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P). (0.5 pt)
2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant :
$$x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$$
   (a) Montrer que (S) est une sphère de centre Ω et déterminer son rayon. (0.5 pt)
   (b) Montrer que (P) coupe (S) suivant un cercle de centre A puis déterminer son rayon. (0.5 pt)
3. Soit (Q_m) un plan d'équation $x+y+mz-2=0$, où m est un nombre réel.
   (a) Vérifier que A est un point du plan (Q_m), pour tout m de $\mathbb{R}$. (0.25 pt)
   (b) Déterminer la valeur du réel m pour que (Q_m) soit perpendiculaire au plan (P). (0.5 pt)
   (c) Existe-t-il un plan (Q_m) qui coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre A ? Justifier. (0.25 pt)

Exercice 2 (4 points)

I) On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $x^2-4x+9=0$

1. Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=\left(2i\sqrt{5}\right)^2$ (0.25 pt)
2. Résoudre l'équation (E) (0.5 pt)

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2+i\sqrt{5}$, $b=2-i\sqrt{5}$ et $c=2-\sqrt{5}$.

1. (a) Vérifier que $|a|=3$ (0.25 pt)
   (b) Montrer que le triangle OAB est isocèle (0.25 pt)
2. (a) Vérifier que $\dfrac{a-c}{b-c}=i$ (0.5 pt)
   (b) Déduire la nature du triangle ABC (0.5 pt)
3. (a) Déterminer l'affixe du point D image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$ (0.5 pt)
   (b) Montrer que $ADBC$ est un carré (0.5 pt)
4. On pose $x_n=\left(\dfrac{a}{3}\right)^n$ et $y_n=\dfrac{1}{1-x_n}$, avec n un entier naturel non nul.
   (a) Vérifier que $x_n\overline{x_n}=1$ (0.25 pt)
   (b) Montrer que $y_n+\overline{y_n}=1$ puis déduire la partie réelle de y_n (0.5 pt)

Exercice 3 (2 points)

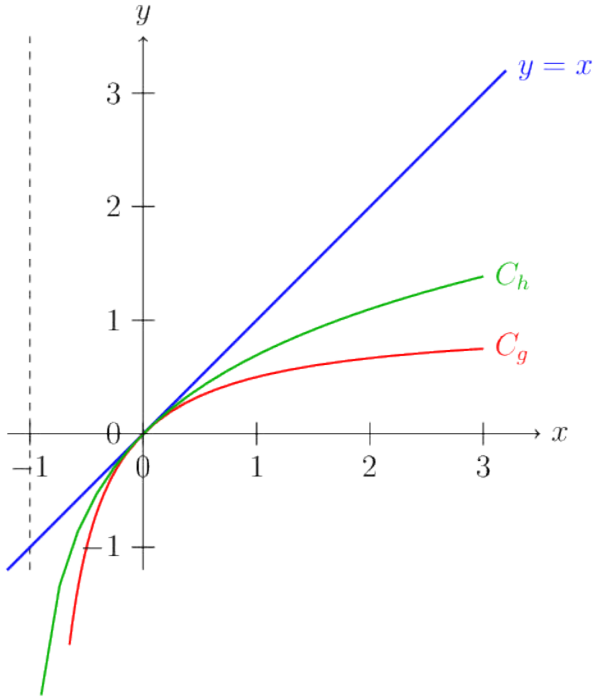
Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

1. Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à 336 (0.25 pt)
2. Calculer la probabilité de l'évènement A : « Tirer trois boules blanches » (0.5 pt)
3. Montrer que la probabilité de l'évènement B : « Tirer trois boules de même couleur » est $p(B)=\dfrac{5}{56}$ (0.75 pt)
4. Calculer la probabilité de l'évènement C : « Obtenir au moins deux couleurs différentes » (0.5 pt)

Problème (10 points)

Partie I :

La figure ci-contre représente les courbes C_g et C_h des fonctions $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ et $h : x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et la droite d'équation $y = x$, dans un même repère orthonormé.



1. (a) Justifier à partir de la figure ci-dessus que $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$, pour tout x de $]-1, +\infty[$ (0.5 pt)
   (b) En déduire que $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$, pour tout x de $]-1, +\infty[$ (0.25 pt)
   (c) Prouver que $e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x) \leq 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$ (0.5 pt)
2. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer par récurrence que $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$ (0.5 pt)
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question 1) a)) (0.5 pt)
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. (0.25 pt)
   (d) Déterminer la limite de (u_n). (0.75 pt)

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Calculer $f(0)$ et vérifier que $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (0.5 pt)
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ puis donner une interprétation géométrique (0.5 pt)
   (c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puis donner une interprétation géométrique (0.5 pt)
2. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^x} - e^{-x}\ln(1+e^x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (0.5 pt)
   (b) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x)}{e^x(1+e^x)}$ (0.5 pt)
   (c) Déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (0.5 pt)
   (On peut utiliser la question 1-c) de la partie I)
3. (a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 (0.5 pt)
   (b) Vérifier que (T) passe par le point $A(1, \frac{1}{2})$ (0.25 pt)

(c) Construire (T) et (C_f) dans le repère (On prend $\ln 2 \approx 0,7$) (0.75 pt)

4. (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J (0.5 pt)

   (b) Vérifier que f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$ (0.5 pt)

5. Soit λ un réel strictement positif.

   (a) Vérifier que $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (0.25 pt)

   (b) Montrer que $\int_0^\lambda \dfrac{1}{1+e^x}dx = \ln(2) - \ln(1+e^{-\lambda})$ (0.5 pt)

   (c) Montrer que $\int_0^\lambda f(x)dx = \ln(2) - f(\lambda) + \int_0^\lambda \dfrac{1}{1+e^x}dx$ (0.5 pt)

   (d) Déduire l'aire A_λ en fonction de λ (0.5 pt)

   (e) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A_\lambda$ (0.5 pt)