

Exercice 1 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1,1,0)$ et $\Omega(-1,1,-2)$ et le plan (P) d'équation $x+z-1=0$

- 0.5 1) a) Vérifier que A est un point du plan (P) et donner un vecteur normal de (P) .
- 0.5 b) Montrer que la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P) .
- 2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$
- 0.5 a) Montrer que (S) est une sphère de centre Ω et déterminer son rayon.
- 0.5 b) Montrer que (P) coupe (S) suivant un cercle de centre A puis déterminer son rayon.
- 3) Soit (Q_m) un plan d'équation $x + y + mz - 2 = 0$, où m est un nombre réel.
- 0.25 a) Vérifier que A est un point du plan (Q_m) , pour tout m de \mathbb{R}
- 0.5 b) Déterminer la valeur du réel m pour que (Q_m) soit perpendiculaire au plan (P)
- 0.25 c) Existe-t-il un plan (Q_m) qui coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre A ? Justifier.

Exercice 2 (4points)

I) On considère dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation $(E): z^2 - 4z + 9 = 0$

- 0.25 1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (2i\sqrt{5})^2$
- 0.5 2) Résoudre l'équation (E)

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points

A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + i\sqrt{5}$, $b = 2 - i\sqrt{5}$ et $c = 2 - \sqrt{5}$.

- 0.25 1) a) Vérifier que $|a| = 3$
- 0.25 b) Montrer que le triangle OAB est isocèle.
- 0.5 2) a) Vérifier que $\frac{a-c}{b-c} = i$
- 0.5 b) Dédire la nature du triangle ABC
- 0.5 3) a) Déterminer l'affixe du point D image de B par la translation de vecteur \overline{CA}
- 0.5 b) Montrer que $ADBC$ est un carré.
- 4) On pose $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$ et $y_n = \frac{1}{1-x_n}$, avec n un entier naturel non nul.
- 0.25 a) Vérifier que $x_n \overline{x_n} = 1$
- 0.5 b) Montrer que $y_n + \overline{y_n} = 1$ puis déduire la partie réelle de y_n

Exercice 3 (2points) :

Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

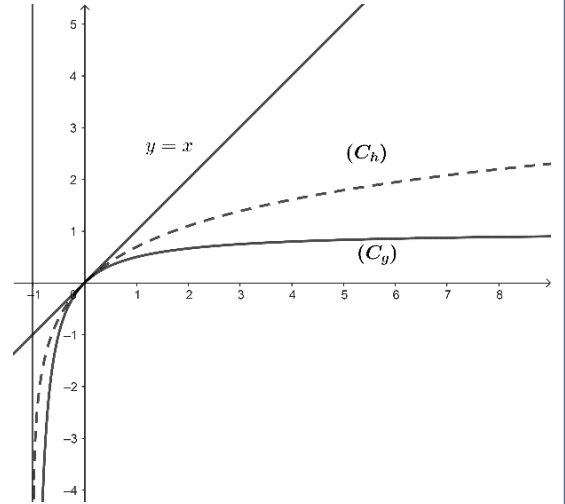
- 0.25 1) Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à 336
- 0.5 2) Calculer la probabilité de l'évènement A : « Tirer trois boules blanches ».
- 0.75 3) Montrer que la probabilité de l'évènement B : « Tirer trois boules de même couleur » est $p(B) = \frac{5}{56}$
- 0.5 4) Calculer la probabilité de l'évènement C : « Obtenir au moins deux couleurs différentes ».

Problème (11points) :**Partie I :**

La figure ci-contre représente les courbes (C_g) et (C_h)

des fonctions $g : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ et $h : x \mapsto \ln(1+x)$ sur

l'intervalle $] -1, +\infty[$ et la droite d'équation $y = x$, dans un même repère orthonormé.



- 0.5 1) a) A partir de cette figure, justifier que :
- $$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \text{ pour tout } x \text{ de }]-1, +\infty[$$
- 0.25 b) En déduire que $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$, pour tout x de $] -1, +\infty[$
- 0.5 c) Prouver que $e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x) \leq 0$, pour tout x de \mathbb{R}
- 2) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 0.5 a) Montrer par récurrence que $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de \mathbb{N}
- 0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question 1) a))
- 0.25 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 0.75 d) Déterminer la limite de (u_n) .

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 0.5 1) a) Calculer $f(0)$ et vérifier que $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
- 0.5 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
- 0.5 c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
- 0.5 2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1}{1+e^x} - e^{-x} \ln(1+e^x)$
- 0.5 b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{e^x - (1+e^x) \ln(1+e^x)}{e^x(1+e^x)}$
- 0.5 c) Dédire que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} (On peut utiliser la question 1-c) de la partie I)
- 0.5 3) a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0
- 0.25 b) Vérifier que la tangente (T) passe par le point $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$
- 0.75 c) Construire (T) et la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prend $\ln 2 \approx 0,7$)
- 0.5 4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $f^{-1}(x)$)
- 0.5 b) Vérifier que f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$
- 5) Soit λ un réel strictement positif.
- 0.25 a) Vérifier que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, pour tout x de \mathbb{R}
- 0.5 b) Montrer que $\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx = \ln(2) - \ln(1+e^{-\lambda})$
- 0.5 c) Montrer que $\int_0^\lambda f(x) dx = \ln(2) - f(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx$ (Remarquer que $f(x) = \frac{1}{1+e^x} - f'(x)$)
- 0.5 d) Dédire en fonction de λ , l'aire A_λ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$
- 0.5 e) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$