

- ✓ On désigne par  $\bar{z}$  le conjugué du nombre complexe  $z$  et par  $|z|$  son module
- ✓  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien

**Exercice 1 (3points) :**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(0,1,4)$ ,  $B(2,1,2)$ ,  $C(2,5,0)$  et  $\Omega(3,4,4)$ .

- 0.25 1) a) Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$
- 0.5 b) En déduire l'aire du triangle  $ABC$  et la distance  $d(B, (AC))$
- 0.25 2) Soit  $D$  le milieu du segment  $[AC]$
- 0.5 a) Vérifier que  $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$
- 0.5 b) En déduire que  $d(\Omega, (ABC)) = 3$ .
- 0.5 3) Soit  $(S)$  la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$
- 0.5 a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère  $(S)$
- 0.5 b) Montrer que le plan  $(ABC)$  est tangent à la sphère  $(S)$  en un point que l'on déterminera.
- 0.5 4) Soient  $(Q_1)$  et  $(Q_2)$  les deux plans parallèles à  $(ABC)$  tels que chacun d'eux coupe  $(S)$  suivant un cercle de rayon  $\sqrt{5}$
- Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans  $(Q_1)$  et  $(Q_2)$

**Exercice 2 (3points) :**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ,  $b = 1 + \sqrt{2} + i$ ,  $c = \bar{b}$  et  $d = 2i$

- 0.25 1) Écrire le nombre complexe  $a$  sous forme trigonométrique.
- 0.25 2) a) Vérifier que  $b - d = c$
- 0.5 b) Montrer que  $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$  et déduire que les points  $A, B$  et  $D$  sont alignés.
- 0.25 3) a) Vérifier que  $ac = 2b$
- 0.5 b) En déduire que  $2\arg(b) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- 0.25 4) Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et qui transforme chaque point  $M$  du plan d'affixe  $z$  en un point  $M'$  d'affixe  $z'$ .
- 0.25 a) Montrer que  $z' = \frac{1}{2}az$
- 0.5 b) En déduire que  $R(C) = B$  et que  $R(A) = D$
- 0.5 c) Montrer que  $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$ , puis déduire une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

**Exercice 3 (3points) :**

Une urne  $U_1$  contient six boules portant les nombres : 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne  $U_2$  contient cinq boules portant les nombres: 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2.

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

« On tire une boule de l'urne  $U_1$  et on note le nombre  $a$  qu'elle porte, puis on la met dans l'urne  $U_2$ , ensuite on tire une boule de l'urne  $U_2$  et on note le nombre  $b$  qu'elle porte ».

On considère les événements suivants :

$A$  : "la boule tirée de l'urne  $U_1$  porte le nombre 1"

$B$  : "le produit  $ab$  est égal à 2"

0.5 1) a) Calculer  $p(A)$  ; la probabilité de l'événement  $A$  .

0.5 b) Montrer que  $p(B) = \frac{1}{4}$  (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

0.75 2) Calculer  $p(A/B)$  ; probabilité de l'événement  $A$  sachant que l'événement  $B$  est réalisé.

3) Soit  $X$  la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit  $ab$

0.25 a) Montrer que  $p(X = 0) = \frac{1}{3}$

0.5 b) Donner la loi de probabilité de  $X$  (Remarquer que les valeurs prises par  $X$  sont : 0 ; 1 ; 2 et 4)

0.5 c) On considère les événements :

$M$  : " le produit  $ab$  est pair non nul" et  $N$  : "le produit  $ab$  est égal à 1 "

Montrer que les événements  $M$  et  $N$  sont équiprobables.

**Problème (11points) :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1 cm).

0.25 1) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  :  $f(x) = \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$

0.5 b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  (On peut poser :  $t = \sqrt{x}$ )

0.5 c) Dédire que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , puis donner une interprétation géométrique du résultat.

0.75 d) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis montrer que la courbe  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de  $+\infty$

0.5 2) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^2}$



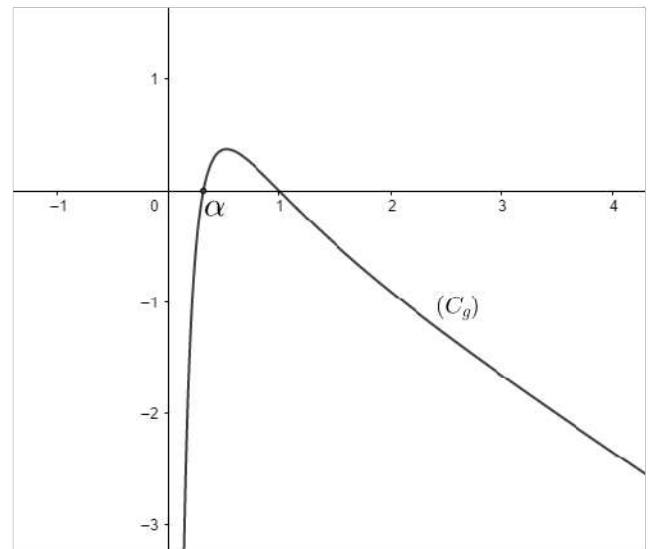
3) En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ :

$x$	0	1	$\beta$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		0	$f'(\beta)$	0

(On donne  $\beta \mid 4.9$ )

- 0.5 a) Prouver que  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  puis dresser le tableau de variations de  $f$
- 0.5 b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde  $f''$  de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$
- 1 c) Dédire la concavité de la courbe  $(C_f)$  en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexion.

- 4) La courbe  $(C_g)$  ci-contre est la représentation graphique de la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$  et qui s'annule en  $\alpha$  et 1 ( $\alpha \sqsubset 0,3$ )
- Soit  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x$ .



- 0.5 a) A partir de la courbe  $(C_g)$ , déterminer le signe de la fonction  $g$  sur  $]0, +\infty[$
- 0.5 b) Dédire que la droite  $(\Delta)$  est en dessous de  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[\alpha, 1]$  et au-dessus de  $(C_f)$  sur les intervalles  $]0, \alpha]$  et  $[1, +\infty[$
- 1.5 5) Construire la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- (On prend :  $\alpha \sqsubset 0.3$ ,  $\beta \mid 4.9$  et  $f(\beta) \sqsupset 1.9$ )
- 0.5 6) a) Vérifier que la fonction  $x \mapsto 2x - x \ln x$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto 1 - \ln x$  sur  $[\alpha, 1]$
- 1 b) En utilisant une intégration par parties, montrer que  $\int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx = 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha$
- 0.75 c) Dédire en fonction de  $\alpha$  l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 1$
- 7) Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in ]\alpha, 1[$  et la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$
- 0.5 a) Montrer par récurrence que  $\alpha < u_n < 1$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
- 0.5 b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante. (on peut utiliser la question 4) b)
- 0.75 c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.