

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
 - ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
 - ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie de l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Equations différentielles et calcul intégral	2.5 points
Problème	Etude de fonctions numériques et suites numériques	8.5 points

- ✓ On désigne par \bar{z} le conjugué du nombre complexe z et $|z|$ son module
 - ✓ \ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

- 0,5 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$
 0,25 b) En déduire que $x + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 0,5 2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$
 Déterminer une équation de la sphère (S)
- 0,5 3) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A
- 4) On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)
- 0,25 a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)
- 0,5 b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées
- 0,5 c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k})$, puis en déduire la distance $d(A, (\Delta))$

Exercice 2 (3points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur \overrightarrow{OA}

- 0,5 1) Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$
- 2) On considère la rotation R de centre D et d'angle $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
- 0,5 Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$
- 0,5 3) a) Ecrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique
 0,5 b) En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$
- 4) Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')
- 0,25 a) Vérifier que $|z + 2| = 2$
- 0,5 b) Prouver que $z + \bar{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$)
- 0,25 c) En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3 (3points) :

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

0,75 1) Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$; où A est l'évènement " N'obtenir aucune boule rouge "

0,75 2) Calculer $p(B)$; où B est l'évènement " Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes "

0,75 3) Montrer que $p(C) = \frac{1}{2}$; où C est l'évènement " Obtenir exactement une boule rouge "

0,75 4) Calculer $p(D)$; où D est l'évènement " Obtenir au moins deux boules rouges "

Exercice 4 (2.5points) :

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (x+1)e^x$

0,75 1) a) Vérifier que $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur \mathbb{R} ; puis calculer $I = \int_{-1}^0 h(x)dx$

0,75 b) A l'aide d'une intégration par parties calculer $J = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^x dx$

0,5 2) a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$

0,5 b) Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$

Problème (8.5points) :

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

0,5 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

0,5 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

0,5 3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0,75 b) Etudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout x de \mathbb{R} et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

0,5 4) a) Montrer que $f'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + x e^{\frac{x}{2}} (e^{\frac{x}{2}} - 1)$ pour tout x de \mathbb{R}

0,5 b) Vérifier que $x(e^{\frac{x}{2}} - 1) \geq 0$ pour tout x de \mathbb{R} puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur \mathbb{R}

0,25 c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur \mathbb{R}

0,5

5) a) Montrer que $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où

$$g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}$$

0,5

b) A partir de la courbe ci-contre de la fonction g ,
 déterminer le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} (Remarque : $g(\alpha) = 0$)

0,5

c) Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les
 abscisses des deux points d'inflexions.

1

6) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(On prend : $\ln(4) \approx 1,4$, $\alpha \approx -4,5$ et $f(\alpha) \approx -3,5$)

0,5

7) a) Montrer que la fonction f admet une fonction
 réciproque f^{-1} définie sur \mathbb{R}

0,25

b) Calculer $(f^{-1})'(\ln 4)$

8) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N}

0,5

a) Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln 4$ pour tout n de \mathbb{N}

0,5

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,25

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

0,5

d) Calculer la limite de la suite (u_n) .

