**I

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2022
– الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS | NS 22ST

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها باللغة الفرنسية	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;**
- ✓ **L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.**

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	**Géométrie de l'espace**	**3 points**
Exercice 2	**Nombres complexes**	**3 points**
Exercice 3	**Calcul des probabilités**	**3 points**
Exercice 4	**Equations différentielles et calcul intégral**	**2.5 points**
Problème	**Etude de fonctions numériques et suites numériques**	**8.5 points**

- ✓ **On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et $|z|$ son module**
- ✓ **ln désigne la fonction logarithme népérien**

Exercice 1 (*3points*) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

0,5 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$

0,25 b) En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$
Déterminer une équation de la sphère (S)

0,5 3) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

4) On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

0,25 a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0,5 b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées

0,5 c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k})$, puis en déduire la distance $d(A,(\Delta))$

Exercice 2 (*3points*) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a=-1-i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b=-1+i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

0,5 1) Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d=-2$

2) On considère la rotation R de centre D et d'angle $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

0,5 Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c=-4$

0,5 3) a) Ecrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

0,5 b) En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2=\frac{c-d}{b-d}$

4) Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

0,25 a) Vérifier que $|z+2|=2$

0,5 b) Prouver que $z+\bar{z}=-8$ (remarquer que $|z|=4$)

0,25 c) En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3 (*3points*) :

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

0,75 1) Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{6}$; où A est l'évènement " N'obtenir aucune boule rouge "

0,75 2) Calculer $p(B)$; où B est l'évènement " Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes "

0,75 3) Montrer que $p(C)=\dfrac{1}{2}$; où C est l'évènement " Obtenir exactement une boule rouge "

0,75 4) Calculer $p(D)$; où D est l'évènement " Obtenir au moins deux boules rouges "

Exercice 4 (*2.5points*) :

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}$

0,75 1) a) Vérifier que $x\mapsto xe^{x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I=\int_{-1}^{0}h(x)\,dx$

0,75 b) A l'aide d'une intégration par parties calculer $J=\int_{-1}^{0}(x+1)^{2}e^{x}\,dx$

0,5 2) a) Résoudre l'équation différentielle $(E):y''-2y'+y=0$

0,5 b) Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0)=1$ et $h'(0)=2$

Problème (*8.5points*) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)^{2}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

0,5 1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

0,5 2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

0,5 3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0,75 b) Etudier le signe de $(f(x)-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

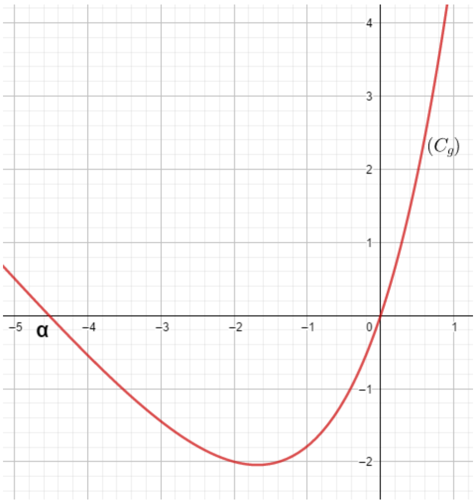
0,5 4) a) Montrer que $f'(x)=(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)^{2}+x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 b) Vérifier que $x(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)\geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

0,25 c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

0,5 5) a) Montrer que $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où $g(x)=(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 b) A partir de la courbe ci-contre de la fonction g , déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha)=0$)



0,5 c) Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

1 6) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prend : $\ln(4)\simeq 1,4$, $\alpha\simeq -4,5$ et $f(\alpha)\simeq -3,5$)

0,5 7) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

0,25 b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 4)$

8) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 a) Montrer par récurrence que $0<u_n<\ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,25 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

0,5 d) Calculer la limite de la suite (u_n) .