Exercice 1 : (8 points)

Partie I- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 1[$ par :

$$f(x) = \ln(1-x)$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

0.25 **1) a)** Montrer que la fonction f est continue sur I

0.25 **b)** Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I

0.75 **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

0.5 **d)** Interpréter graphiquement les résultats obtenus

0.25 **e)** Donner le tableau de variations de f

0.25 **2) a)** Montrer que la courbe (C) est concave.

0.25 **b)** Représenter graphiquement la courbe (C) dans la repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

0.25 **3) a)** Montrer que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$

On note f^{-1} sa bijection réciproque.

0.25 **b)** Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

0.25 **c)** Vérifier que : $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$

Partie II- Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n}$$

0.5 **1)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0; 1[$ tel que :

$$\boldsymbol{P_n(x_n) = 1}$$

0.5 **2)** Déterminer le réel $\alpha = x_2$ et vérifier que : $0 < \alpha < 1$

0.5 **3) a)** Montrer que : pour tout entier $n \geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n) > 1$

0.5 **b)** En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

0.25 **c)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $x_n \in]0; \alpha[$

0.25 **d)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

4) Pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$f_n(x) = f(x) + P_n(x)$$

0.5 **a)** Montrer que : $(\forall x \in I)$; $(\forall n \geq 2)$ $f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x}$

0.25 **b)** Montrer que : $(\forall x \in [0;\alpha[)$; $(\forall n \geq 2)$ $\left|f'_n(x)\right| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0.5 **c)** En déduire que : $(\forall x \in [0;\alpha[)$; $(\forall n \geq 2)$ $|f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0.5 **d)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)$ $|f_n(x)+1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0.5 **e)** En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Exercice 2 : $(4\ \boldsymbol{points})$

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}}dt$

0.5 **1) a)** Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1 **b)** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

0.5 **2) a)** En utilisant la méthode d'intégration par partie montrer que :

$$\int_0^1 \boldsymbol{F(x)dx} = \int_0^1 (\boldsymbol{1-x})\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2}}\boldsymbol{dx}$$

0.5 **b)** Calculer $\int_0^1 F(x)dx$

3) On considère la suite $(u_n)_{n\geq1}$ définie par :

$$(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*) \qquad \boldsymbol{u_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2}}\,\boldsymbol{dx}\right)$$

0.5 **a)** Vérifier que :

$$(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*) \quad \boldsymbol{u_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})\boldsymbol{F}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})\boldsymbol{F}\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 **b)** Montrer que : $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*)$ $\boldsymbol{u_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\boldsymbol{F}\left(\frac{k}{n}\right)$

0.5 **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 : $(4\ \boldsymbol{points})$

m est un nombre complexe différent de 2 et de $-i$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(\boldsymbol{E}) :\ \boldsymbol{z^2-(m-i)z-im=0}$$

0.5 **1) a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(\boldsymbol{m+i})^2$

0.5 **b)** Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

0.75 **c)** Sachant que $\boldsymbol{m=e^{i\frac{\pi}{8}}}$; écrire le nombre z_1+z_2 sous forme exponentielle.

2) On considère les points A , B et M d'affixes respectifs $\boldsymbol{2}$ **,** $\boldsymbol{-i}$ et m et soit M'
Le symétrique de M par rapport à l'axe' imaginaire.

0.5 **a)** Déterminer en fonction de m l'affixe de M'

0.75 **b)** Déterminer en fonction de m l'affixe du point N tel que le quadrilatère $ANM'B$
Soit un parallélogramme.

1 **c)** Montrer que les deux droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires
si et seulement si $Re\big((2-i)m\big)=Re(m^2)$

Exercice 4 : $(4\ \boldsymbol{points})$

Soit a un entier naturel supérieur ou égale à 2

et soit $A=1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$

Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

1 **1) a)** Montrer que $a^7\equiv 1[p]$, en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$; $a^{7n}\equiv[p]$

1 **b)** Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que :

$$\forall \boldsymbol{m}\in\mathbb{N}\ ;\ \ \boldsymbol{a^{(p-1)m}\equiv 1[p]}$$

2) On suppose que 7 ne divise pas $p-1$

0.5 **a)** Montrer que : $\boldsymbol{a\equiv 1[p]}$

0.5 **b)** En déduire que : $\boldsymbol{p=7}$

1 **3)** Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A
Alors : $\boldsymbol{p=7}$ ou $\boldsymbol{p\equiv 1[7]}$