

**الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا****المسالك الدولية****الدورة الاستدراكية 2020  
- الموضوع -**

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

RS 22F

٤٢٨٤١٩٤٠٩  
٥٣٦٤١٩٣٤٠٩  
٨٩٣٤٤٧٦٣٣٦  
٦٣٣٦٣٣٦٣٣٦



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني  
والتعليم العالي والبحث العلمي  
المركز الوطني للتقدير والامتحانات

3 مدة الإنجاز

**الرياضيات**

المادة

7 المعامل

**شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية  
(خيار فرنسية)**

الشعبة أو المسلك

**INSTRUCTIONS GENERALES**

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

**COMPOSANTES DU SUJET**

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

<b>Exercice 1</b>	<b>Suites numériques</b>	<b>2 points</b>
<b>Exercice 2</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>5 points</b>
<b>Exercice 3</b>	<b>Dérivabilité et calcul intégral</b>	<b>4 points</b>
<b>Problème</b>	<b>Etude d'une fonction numérique et suites numériques</b>	<b>9 points</b>

- ✓ On désigne par  $|z|$  le module du nombre complexe  $z$  et par  $\bar{z}$  le conjugué de  $z$
- ✓  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien

**Exercice 1 : (2 points )**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

**0.5** 1) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n < 2$

2) On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

**0.5** a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison 2

**0.75** b) Ecrire  $v_n$  en fonction de  $n$  et en déduire  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

**0.25** c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$

**Exercice 2 : (5 points )**

**0.75** 1) Résoudre dans l'ensemble  $\square$  des nombres complexes l'équation :  $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

2) On pose  $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

**0.75** a) Ecrire  $a$  sous forme trigonométrique et en déduire que  $a^{2020}$  est un nombre réel

**0.5** b) Soit le nombre complexe  $b = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ . Prouver que  $b^2 = a$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que  $c = 1$ . La rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{8}$  transforme le point  $M$  d'affixe  $z$  au point  $M'$  d'affixe  $z'$ .

**0.25** a) Vérifier que  $z' = bz$

**0.5** b) Déterminer l'image de  $C$  par la rotation  $R$  et montrer que  $A$  est l'image de  $B$  par  $R$ .

**0.75** 4) a) Montrer que  $|a - b| = |b - c|$  et en déduire la nature du triangle  $ABC$

**0.5** b) Déterminer une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

5) Soit  $T$  la translation de vecteur  $\vec{u}$  et  $D$  l'image de  $A$  par  $T$

**0.25** a) Vérifier que l'affixe de  $D$  est  $b^2 + 1$

**0.75** b) Montrer que  $\frac{b^2 + 1}{b} = b + \bar{b}$  et en déduire que les points  $O$ ,  $B$  et  $D$  sont alignés

**Exercice 3 : (4 points )**

On considère la fonction numérique  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = e^x - 2x + 2 - 3e^{-x}$

0.5 1)a) Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $u'(x) = \frac{(e^x - 1)^2 + 2}{e^x}$

0.25 b) poser le tableau de variation de la fonction  $u$  (sans calcul de limite) ;

0.5 c) En déduire le signe de la fonction  $u$  sur  $\mathbb{R}$  (remarquer que  $u(0) = 0$ )

2) Soit la fonction  $v$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $v(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 3$

0.5 a)Vérifier que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $v(x) = e^x u(x)$

0.5 b) En déduire le signe de la fonction  $v$  sur  $\mathbb{R}$

0.5 3) a) Montrer que la fonction  $W$  définie par  $W(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (4 - 2x)e^x - 3x$  est une primitive de la fonction  $v$  sur  $\mathbb{R}$

0.5 b) Calculer l'intégrale  $\int_0^2 v(x)dx$

0.75 c) Montrer que  $\frac{9}{2}$  est le minimum absolu de la fonction  $W$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Problème : (9 points )**

I - Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$

0.5 1) Montrer que  $g'(x) < 0$ , pour tout  $x \in [0, +\infty[$

0.5 2) Déduire le tableau de signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ; (remarquer que  $g(1) = 0$ )

II – On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$  et ( $C$ ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité : 2 cm )

0.5 1) Montrer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  puis interpréter le résultat géométriquement

0.5 2) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

0.75 b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  puis interpréter le résultat géométriquement

1 3) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$ ,  $f'(x) = (x-2)g(x)$

0.75 b) Montrer que la fonction  $f$  est décroissante sur  $[0, 1]$  et sur  $[2, +\infty[$  et croissante sur  $[1, 2]$

0.25 c) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$ , (on admet  $f(2) \approx 1,25$  )

**0.5** 4) Sachant que  $f(3) = 0.5$  et  $f(4) = -1.9$  montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[3, 4]$ .

**1** 5) Construire ( $C$ ) dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

III - On pose  $h(x) = f(x) - x$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1, 2]$

**0.5** 1) a) A partir du tableau de variations de la fonction  $h$  ci-contre montrer que  $f(x) \leq x$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1, 2]$

$x$	1	2
$h(x)$	0	↘ $h(2)$

**0.25** b) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[1, 2]$

2) Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

**0.75** a) Montrer par récurrence que  $1 \leq u_n \leq 2$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

**0.5** b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**0.75** c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$