

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

المعاليه الدولية

الدورة العادية 2020
- الموضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

NS 22F

السلطة المائية
وزارة التربية والشباب
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
A 2020/CN/NS/22F



سلطة الماء
وزارة التربية والشباب
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للنقاوم وامتحانات

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسار

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	4 points
Exercice 2	Nombres complexes	5 points
Exercice 3	Limites, dérivabilité et calcul intégral	4 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	7 points

- ✓ On désigne par \bar{z} le conjugué du nombre complexe z
- ✓ \ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$ pour tout n de \mathbb{N}

0.25 1) Calculer u_1

0.5 2) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n > 0$

1 3)a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

puis en déduire que pour tout n de \mathbb{N} , $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

0.5 b) Calculer $\lim u_n$

4) On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ pour tout n de \mathbb{N} .

0.75 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

1 b) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de \mathbb{N} .

Exercice 2 : (5 points)

1) Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

0.5 a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

1 b) En déduire les solutions de l'équation (E) .

2) Soient les nombres complexes $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

0.75 a) Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$

0.5 b) Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique

0.5 c) En déduire que $a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$. Soient z l'affixe d'un

point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

0.5 a) Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$

0.25 b) Déterminer l'image du point C par la rotation R

0.25 c) Déterminer la nature du triangle BOC .

0.75 d) Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

0.5 1)a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

0.5 b) Montrer que g est croissante sur $[1, +\infty[$

0.5 c) en déduire que pour tout x de $[1, +\infty[$, $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ (Remarquer que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$)

1 d) Montrer que pour tout x de $[1, +\infty[$, $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$

0.75 2) a) Montrer que la fonction $G : x \mapsto x \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right)$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$

0.75 b) Calculer l'intégrale $\int_1^4 g(x) dx$

Problème : (7 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2cm)

0.5 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

0.5 2) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0.75 b) Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty, 2 + \ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln 4, +\infty[$

0.5 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat

0.5 4) a) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$

0.25 b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.75 5) Calculer $f''(x)$ pour tout x de \mathbb{R} puis montrer que $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de (C)

0.5 6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$

1 7) Construire (Δ) et (C) dans le même repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (on prend $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$)

- 0.5 8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur \mathbb{R}
- 0.75 b) Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative de la fonction f^{-1}
(Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)
- 0.5 c) Calculer $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$)