المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵏⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2019
- الموضوع -

RS25

المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte aux nombres complexes ....(3.5 pts)

- L'exercice2 se rapporte au calcul des probabilités ....(3 pts)

- L'exercice3 se rapporte aux structures algébriques ....(3.5 pts)

- L'exercice4 se rapporte à l'analyse ....(10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 :(3.5 points)

Soit α un nombre complexe non nul.

I- On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

(E_α) : $z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

0.25 1-a- Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$

0.5 b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

0.5 2- Sachant que $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

II- On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points Ω , M_1 et M_2 d'affixes respectivement α , $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

0.5 1-a-Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

0.25 b- En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et OM_1M_2 sont équilatéraux.

0.25 2-a- Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

0.5 b- Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.

0.25 c- En déduire que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange .

0.5 3- Montrer que pour tout réel θ , le nombre : $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.

EXERCICE2 : (3 points)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$). On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1 1- Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?

1 2- Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?

1 3- On considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules 1, 2 et 3.

Déterminer la loi de probabilité de X_n.

EXERCICE3 : (3.5 points)

On considère l' espace vectoriel de dimension 2 noté $(V_2,+,.)$.

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base de V_2. On pose : $\vec{e_1} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ et $\vec{e_2} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie par :

$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$ $(x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx' + yy')\vec{i} + (xy' + yx')\vec{j}$

0.25 1-a- Montrer que $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base de V_2

0.25 b-Vérifier que : $\vec{e_1} * \vec{e_1} = \vec{e_1}$; $\vec{e_2} * \vec{e_2} = \vec{e_2}$ et $\vec{e_1} * \vec{e_2} = \vec{e_2} * \vec{e_1} = \vec{0}$

0.25 c- Montrer que : $\forall (X, X', Y, Y') \in \mathbb{R}^4 \;\; (X\vec{e_1} + Y\vec{e_2}) * (X'\vec{e_1} + Y'\vec{e_2}) = XX'\vec{e_1} + YY'\vec{e_2}$

0.25 2-a- Montrer que la loi $*$ est commutative.

0.25 b- Montrer que la loi $*$ est associative.

0.25 c- Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

0.25 d- Montrer que $(V_2, +, *)$ est un anneau commutatif unitaire.

3- Soit $\vec{u} \in V_2 - \{\vec{0}\}$. On note : $E_{\vec{u}} = \{\lambda \vec{u} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$

0.25 a- Montrer que $(E_{\vec{u}}, +)$ est un sous-groupe du groupe $(V_2, +)$

0.25 b- Montrer que $(E_{\vec{u}}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(V_2, +, .)$

0.5 c- Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable pour $* \Leftrightarrow$ la famille $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u})$ est liée

4- On suppose que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^*)$; $\vec{u} * \vec{u} = \alpha \vec{u}$

On considère l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^* \to E_{\vec{u}}$$
$$x \mapsto \frac{x}{\alpha}\vec{u}$$

0.5 a- Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E_{\vec{u}}, *)$

0.25 b- En déduire que $(E_{\vec{u}}, +, *)$ est un corps commutatif.

<u>EXERCICE4</u> : (10 points)

PARTIE I

On considère la fonction g définie sur $I =]-1, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

0.25 1- a- Montrer que : $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 2$

0.5 b- Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

0.5 2- Montrer que g est dérivable sur I et que $(\forall x \in I)$ $\quad g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$

3- On donne le tableau de variations de g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{5}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

0.5 a-Montrer qu'il existe un réel strictement positif α unique tel que : $g(\alpha) = 0$

0.25 b- Vérifier que : $\alpha < 1$ (On prendra : $\ln 2 = 0.7$)

0.5 c- En déduire que : $\left(\forall x \in \left]-1,\alpha\right[\right) \quad 0 < g(x)$ et que : $\left(\forall x \in \left]\alpha,+\infty\right[\right) \quad g(x) < 0$

Partie II : On considère la fonction f définie sur $I = \left]-1,+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 1-a- Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.75 2- a- Montrer que f est dérivable sur I et que $(\forall x \in I) \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

0.5 b- Donner le sens de variation de f sur I

0.75 c- Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ et que : $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

0.25 3-a- Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

0.5 b- Montrer que : $(\forall x > 0) \quad \ln(1+x) < x$

0.25 c- En déduire que : $(\forall x > 0) \quad f(x) < x$

1 d- Représenter graphiquement (T) et (C) (On prendra : $\alpha = 0.8$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

Partie III : On pose $J = \int_0^1 f(x)\,dx$

1 1- a- En utilisant le changement de variable : $t = \dfrac{1-x}{1+x}$, montrer que : $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$

0.5 b- Déterminer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la tangente (T), la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$

1 2- En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : $K = \int_0^1 \dfrac{\arctan(x)}{1+x}\,dx$

FIN