

Contenu	Capacités attendues
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Unités de mesure des angles</li> <li>▪ Abscisses curvilignes d'un point du cercle trigonométrique</li> <li>▪ Angle orienté de deux demi-droites et de deux vecteurs et ses mesures</li> <li>▪ Rapports trigonométriques d'un nombre réel</li> <li>▪ Fonction tangente</li> <li>▪ Equations et inéquations trigonométriques fondamentales</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Emploi de la trigonométrie dans des situations et des problèmes relatifs au triangle</li> <li>▪ Représentation des nombres réels sur le cercle trigonométrique en utilisant la notion d'abscisse curviligne et application des différentes relations</li> <li>▪ Résolution des équations et inéquations trigonométriques fondamentales et représentation des solutions sur le cercle trigonométrique</li> <li>▪ Capacité de tracer la courbe de chacune des fonctions trigonométriques sin et cos et l'exploiter dans la compréhension et la consolidation des notions de périodicité, de parité, de monotonie..</li> </ul>

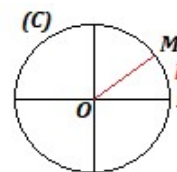
## I. Unités de mesure des angles

### a. Définition :

Soit  $(C)$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $1$ .

Soient  $I$  et  $M$  deux points de  $(C)$

La mesure de l'angle géométrique  $\widehat{IOM}$  en radian est la longueur  $l$  de l'arc  $\widehat{IM}$



Proportionnalité des unités de mesure

- La mesure d'un angle plat en degrés est  $180^\circ$  tandis que sa mesure en radians est  $\pi$  (longueur d'un demi-cercle de rayon 1)
- Si  $a$  et  $\alpha$  sont les mesures respectives d'un angle géométrique en degrés et en radians alors :  $\frac{a}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$

### b. Exercice :

Calculer en radians les mesures des angles.

- 1) d'un triangle équilatéral
- 2) d'un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  et  $\widehat{ABC} = 60^\circ$
- 3) d'un parallélogramme sachant que la mesure de l'un de ses angles est  $45^\circ$

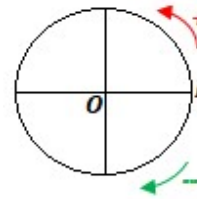
## II. Abscisses curvilignes d'un point du cercle trigonométrique

**a. Définition :**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- On appelle cercle trigonométrique le cercle orienté de centre  $O$ , de rayon 1 et muni d'une origine  $I$ .

sur ce cercle on définit deux sens :



- Le sens positif (ou direct) est le sens de rotation autour du cercle en partant de  $I$  dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- Le sens négatif (ou indirect) est le sens des aiguilles d'une montre.
- Soient  $(C)$  un cercle trigonométrique de centre  $O$  et d'origine  $I$  et  $x$  un nombre réel.
  - Dans le cas où  $x \geq 0$ , on considère le point  $M$  de  $(C)$  tel que la mesure en radians de la longueur de l'arc  $IM$  est  $x$  lors du déplacement sur  $(C)$  dans le sens positif.
  - Dans le cas où  $x < 0$ , on considère le point  $M$  de  $(C)$  tel que la mesure en radians de la longueur de l'arc  $IM$  est  $-x$  lors du déplacement sur  $(C)$  dans le sens négatif.
  - Dans les deux cas  $x$  s'appelle abscisse curviligne du point  $M$  sur  $(C)$  et on écrit  $M(x)$ .

Si  $x \in ] -\pi; \pi]$  alors  $x$  est dite l'abscisse curviligne principale du point  $M$  et elle est unique
  - Si  $x$  est une abscisse curviligne d'un point  $M$  alors  $x + k(2\pi)$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$  est aussi une abscisse curviligne de  $M$

**b. Exercice :**

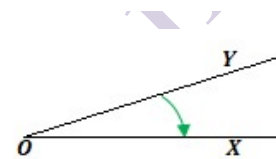
- 1) Représenter sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes :  $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{-2\pi}{3}; \frac{-11\pi}{3}$
- 2) Représenter sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes :  $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{-\pi}{4}; \frac{-7\pi}{4}; \frac{-11\pi}{4}$
- 3) Déterminer l'abscisse curviligne principale du point  $M\left(\frac{2005\pi}{4}\right)$  et représenter ce point sur le cercle trigonométrique.

- 4) Déterminer l'abscisse curviligne principale du point  $M\left(\frac{2025\pi}{6}\right)$  et représenter ce point sur le cercle trigonométrique.

### III. Angle orienté de deux demi-droites - de deux vecteurs

#### a. Définitions et propriétés :

- Soient  $[OX)$  et  $[OY)$  deux demi-droites ayant le même origine  $O$ .
  - Le couple  $([OX) ; [OY))$  détermine un angle orienté de deux demi-droites que l'on note  $(\widehat{OX, OY})$
  - Le couple  $([OY) ; [OX))$  détermine un angle orienté de deux demi-droites que l'on note  $(\widehat{OY, OX})$



- Soient  $(C)$  un cercle trigonométrique de centre  $O$  et d'origine  $I$  et  $(\widehat{OX, OY})$  un angle orienté de deux demi-droites.

Les deux demi-droites  $[OX)$  et  $[OY)$  coupent  $(C)$  respectivement en  $I$  et  $M$ .

Soit  $a$  une abscisse curviligne de  $M$  sur  $(C)$

- Le nombre réel  $a$  est appelé mesure de l'angle orienté  $(\widehat{OX, OY})$
- Si  $a \in ]-\pi; \pi]$  alors  $a$  est la mesure principale de  $(\widehat{OX, OY})$
- $a + k(2\pi)$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$  est aussi mesure de l'angle orienté  $(\widehat{OX, OY})$ .
- Si On note l'une de ces mesures par  $(\overline{OX; OY})$  on peut écrire :

$$(\overline{OX; OY}) = a + k(2\pi) \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

- Soient  $[OX)$ ,  $[OY)$  et  $[OZ)$  trois demi-droites. On a
  - $(\overline{OX; OX}) = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
  - $(\overline{OY; OX}) = -(\overline{OX; OY}) + 2k\pi$
  - $(\overline{OX; OY}) + (\overline{OY; OZ}) = (\overline{OX; OZ}) + 2k\pi$
- Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls et les deux demi-droites  $[OX)$  et  $[OY)$  telles que  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de  $[OX)$  et  $\vec{v}$  un

vecteur directeur de  $[OY)$

- L'angle orienté des deux vecteurs déterminé par le couple  $(\vec{u}; \vec{v})$  est l'angle orienté  $(\widehat{OX; OY})$  et on le note  $(\vec{u}; \vec{v})$
- Les mesures de  $(\vec{u}; \vec{v})$  sont par défaut les mesures de  $(\widehat{OX; OY})$  et sont notées  $(\vec{u}; \vec{v})$

**b. Exercice :**

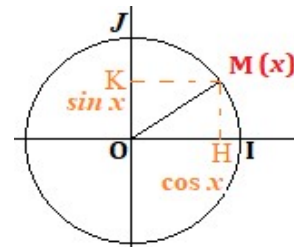
- 1) Dans chacun des cas suivants tracer un angle orienté  $(\widehat{OX, OY})$  qui admet l'un des nombres réels suivants comme mesure :  $\frac{3\pi}{4}; \frac{17\pi}{3}; \frac{-25}{6}; \frac{-2005\pi}{6}$
- 2) Soient  $\frac{13\pi}{12}$  une mesure de l'angle  $(\widehat{OX, OY})$  et  $\frac{29\pi}{12}$  une mesure de l'angle  $(\widehat{OY, OZ})$ . Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants :  $(\widehat{OX, OY}); (\widehat{OY, OZ})$  et  $(\widehat{OX, OZ})$

## IV. Rapports trigonométriques d'un nombre réel

### 1. Cosinus et sinus

a. **Activité :** Soient  $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$  un repère orthonormé et  $(C)$  le cercle trigonométrique de centre  $O$  et d'origine  $I$ .

Soient  $x$  un nombre réel et  $M$  le point d'abscisse curviligne  $x$  sur le cercle trigonométrique  $(C)$ .



- L'abscisse de  $M$  dans le repère  $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$  est s'appelle cosinus  $x$  et se note  $\cos x$ .
- L'ordonnée de  $M$  dans le repère  $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$  est s'appelle sinus  $x$  et se note  $\sin x$ .

1) Déterminer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants :

$$0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi; -\frac{\pi}{2}; -\pi; -2\pi$$

2) Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(OI)$  et  $K$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(OJ)$ .

1. Dans le cas où  $x = \frac{\pi}{6}$ . Montrer que  $OMJ$  est un triangle équilatéral et en déduire  $\sin \frac{\pi}{6}$  et  $\cos \frac{\pi}{6}$

2. Dans le cas où  $x = \frac{\pi}{4}$ . Montrer que  $OMH$  est un triangle isocèle et en déduire  $\sin \frac{\pi}{4}$  et  $\cos \frac{\pi}{4}$

3. Dans le cas où  $x = \frac{\pi}{3}$ . Montrer que  $OMI$  est un triangle équilatéral et calculer  $\sin \frac{\pi}{3}$  et  $\cos \frac{\pi}{3}$

3) Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :

1.  $-1 \leq \cos x \leq 1$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$

2.  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

4) Donner le tableau de signe de  $\cos$  et de  $\sin$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$

**b. Définitions et propriétés :**

Soient  $(C)$  un cercle trigonométrique d'origine  $I$  et de centre  $O$  et  $J$  le point de  $(C)$  tel que  $\frac{\pi}{2}$  soit la mesure principale de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ .

Soit  $x$  un nombre réel et  $M$  un point de  $(C)$  dont  $x$  est l'une des abscisses curvilignes.

- L'abscisse  $x_M$  du point  $M$  dans le repère orthogonal  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  est appelée cosinus  $x$  et on écrit  $\cos x = x_M$
- L'ordonnée  $y_M$  du point  $M$  dans le repère orthogonal  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  est appelée sinus  $x$  et on écrit  $\sin x = y_M$
- Pour tout réel  $x$  on a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 ; -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ et } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

**c. Exercice :**

1) Calculer  $\sin \alpha$  sachant que  $\cos \alpha = \frac{3}{10}$  et  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

2) Calculer  $\cos \beta$  sachant que  $\sin \beta = 0,2$  et  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

3) Montrer que

$$(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\cos x \cdot \sin x$$

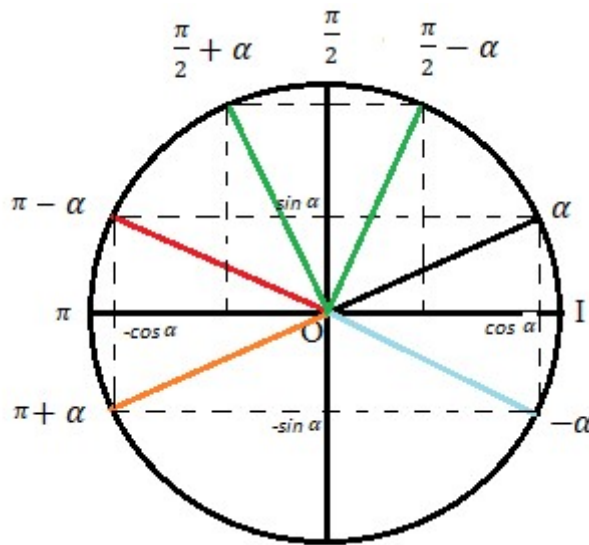
$$\text{et } (\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \cdot \sin x$$

❖ **Relations trigonométriques**

a. **Propriétés** : Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

On a :

- $\cos(x + k(2\pi)) = \cos x$
  - $\cos(-x) = \cos x$
  - $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  - $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
  - $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  - $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(x + k(2\pi)) = \sin x$
  - $\sin(-x) = -\sin x$
  - $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
  - $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
  - $\sin(\pi - x) = \sin x$
  - $\sin(\pi + x) = -\sin x$



**Tableau des valeurs usuelles**

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

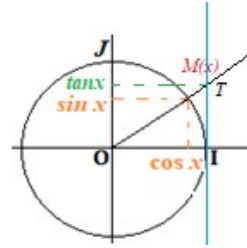
**b. Application :** Calculer les cosinus et sinus des nombres réels suivants :

$$\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{8\pi}{3}; \frac{29\pi}{6}; \frac{45\pi}{2}; \frac{-2026\pi}{3}$$

## 2. Tangente

a. **Activité** : Soient  $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$  un repère orthonormé et  $(C)$  le cercle trigonométrique de centre  $O$  et d'origine  $I$ .

Soient  $x$  un nombre réel,  $M$  le point d'abscisse curviligne  $x$  sur le cercle trigonométrique  $(C)$  et  $(D)$  la droite tangente au cercle  $(C)$  en  $I$ .



Soit  $T$  le point d'intersection de  $(OM)$  et  $(D)$

On a : l'ordonnée  $y_T$  du point  $T$  dans le repère orthogonal  $(\vec{OI}; \vec{OJ})$  est appelée tangente  $x$  et on écrit  $\tan x = y_T$

$$\text{et on a : } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$  :

$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2) Donner le tableau de signe de  $\tan x$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$

b. **Définition et propriété** :

Soit  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Le nombre réel  $\frac{\sin x}{\cos x}$  est appelé tangente  $x$  et on écrit :  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Et on a pour tout  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$  :

$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

c. **Application** :

1) Soit  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\sin \alpha = 0,3$ . Calculer  $\cos \alpha$  et  $\tan \alpha$

2) Soit  $\beta \in ]0; \pi[$  tel que  $\cos \beta = -\frac{1}{3}$ . Calculer  $\sin \beta$  et  $\tan \beta$

3) Soit  $\gamma \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\tan \gamma = -\frac{2}{5}$ . Calculer  $\cos \gamma$  et  $\sin \gamma$

## V. La représentation graphique des fonctions cos, sin et tan

### 1. La fonction cosinus et la fonction sinus

La fonction sinus notée sin est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{array}{ccc} \sin : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \sin x \end{array}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$\color{red}{\boxplus} \sin(-x) = -\sin x$$

On dit que la fonction sin est impaire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine.

$$\color{red}{\boxplus} \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

On dit que la fonction sin est  $2\pi$  - périodique.

La fonction cosinus notée cos est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{array}{ccc} \cos : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \cos x \end{array}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

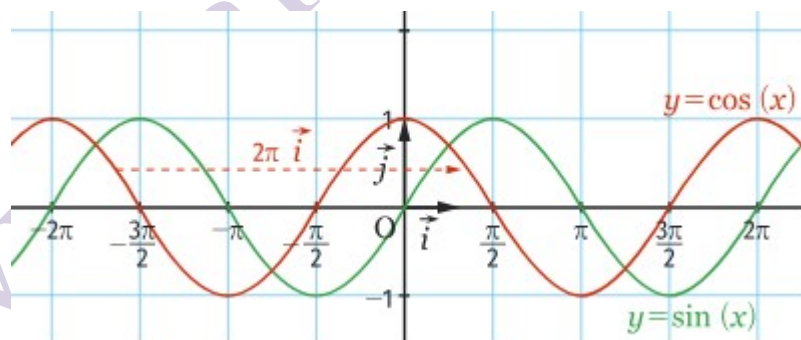
$$\color{red}{\boxplus} \cos(-x) = \cos x$$

On dit que la fonction sin est paire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$$\color{red}{\boxplus} \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

On dit que la fonction cos est  $2\pi$  - périodique.

### Représentation graphique



### 2. La fonction tangente


La fonction tangente notée tan est définie sur  $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$  par :

$$\begin{array}{ccc} \tan : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \tan x \end{array}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$  on a :

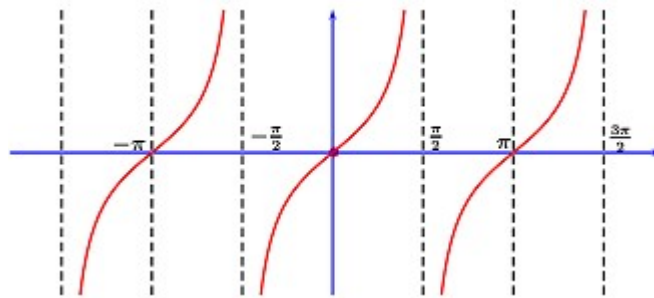
$$\color{red}{\boxplus} \tan(-x) = -\tan x$$

On dit que la fonction tan est impaire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère O.

  $\tan(x + \pi) = \tan x$

On dit que la fonction tan est  $\pi$ -périodique.

**Représentation graphique**




**VI. Equations et inéquations trigonométriques fondamentales**


**1. Equation  $\cos x = a$**


**a. Activité :**

On considère l'équation (E) :  $\cos x = a$

- 1) Est-ce-que (E) admet des solutions si  $a < -1$  ou  $a > 1$  ?
- 2) Représenter sur le cercle trigonométrique les points M d'abscisses curvilignes x vérifiant l'équation (E) dans chacun des cas suivants

  $a = 1$

  $a = -1$

  $a = \frac{1}{2}$

- 3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans chacun des cas précédents.
- 4) Soient  $-1 < a < 1$  et  $\alpha \in ]0; \pi[$  tels que  $\cos \alpha = a$ .
  1. Représenter sur le cercle trigonométrique les points M d'abscisses curvilignes x vérifiant l'équation (E)
  2. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

**b. Propriété :** Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

On considère l'équation (E):  $\cos x = a$ .

On a :

- Si  $a \notin [-1; 1]$  alors (E) n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$

- Si  $a = 1$  alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

- Si  $a = -1$  alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

- Si  $-1 < a < 1$  alors il existe un nombre réel unique  $\alpha \in ]0; \pi[$  tel que  $\cos \alpha = a$  et l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

**c. Applications :**

1) On considère l'équation (E) :  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E)
2. Trouver les solutions de (E) dans  $[-2\pi; 2\pi]$
3. Représenter ces solutions sur le cercle trigonométrique
4. En déduire dans  $[-2\pi; 2\pi]$  les solutions des inéquations :

$$\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) On considère l'équation (E) :  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E)
2. Trouver les solutions de (E) dans  $[-2\pi; 2\pi]$
3. Représenter ces solutions sur le cercle trigonométrique
4. En déduire dans  $[-2\pi; 2\pi]$  les solutions des inéquations :


$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$


**2. Equation  $\sin x = a$**


**a. Activité :**

On considère l'équation (E) :  $\sin x = a$

- 1) L'équation (E) admet-elle des solutions si  $a < -1$  ou  $a > 1$  ?
- 2) Représenter sur le cercle trigonométrique les points M d'abscisses curvilignes x vérifiant l'équation (E) dans chacun des cas suivants

  $a = 1$

  $a = -1$

  $a = \frac{1}{2}$

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans chacun des cas précédents.

4) Soient  $-1 < a < 1$  et  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  tels que  $\sin \alpha = a$ .

3. Représenter sur le cercle trigonométrique les points  $M$  d'abscisses curvilignes  $x$  vérifiant l'équation (E)

4. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

**b. Propriété :** Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

On considère l'équation (E):  $\sin x = a$ .

On a :

▪ Si  $a \notin [-1; 1]$  alors (E) n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$

▪ Si  $a = 1$  alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

▪ Si  $a = -1$  alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

▪ Si  $-1 < a < 1$  alors il existe un nombre réel unique  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

tel que  $\sin \alpha = a$  et l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

**c. Applications :**

1) On considère l'équation (E) :  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E)

2. Trouver les solutions de (E) dans  $[-2\pi; 2\pi]$

3. Représenter ces solutions sur le cercle trigonométrique

4. En déduire dans  $[-2\pi; 2\pi]$  les solutions des inéquations :

$$\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) On considère l'équation (E) :  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E)

2. Trouver les solutions de (E) dans  $[-2\pi; 2\pi]$
3. Représenter ces solutions sur le cercle trigonométrique
4. En déduire dans  $[-2\pi; 2\pi]$  les solutions des inéquations :

$$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### 3. Equation $\tan x = a$

#### a. Activité :

On considère l'équation (E) :  $\tan x = a$

- 1) Représenter sur le cercle trigonométrique les points M d'abscisses curvilignes x vérifiant l'équation (E) dans chacun des cas suivants

$$a = 0$$

$$a = 1$$

- 2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans chacun des cas précédents.
- 3) Soit  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  tels que  $\tan \alpha = a$ .
  5. Représenter sur le cercle trigonométrique les points M d'abscisses curvilignes x vérifiant l'équation (E)
  6. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

#### b. Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}$ .

On considère l'équation (E):  $\tan x = a$ .

Il existe un nombre réel unique  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\tan \alpha = a$  et l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

#### c. Application :

- 3) On considère l'équation (E) :  $\tan x = \sqrt{3}$ 
  1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E)
  2. Trouver les solutions de (E) dans  $[-2\pi; 2\pi]$
  3. Représenter ces solutions sur le cercle trigonométrique

4. En déduire dans  $[-2\pi; 2\pi]$  les solutions des inéquations :

$$\tan x < \sqrt{3} \text{ et } \tan x > \sqrt{3}$$

4) On considère l'équation (E) :  $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E)
2. Trouver les solutions de (E) dans  $[-2\pi; 2\pi]$
3. Représenter ces solutions sur le cercle trigonométrique
4. En déduire dans  $[-2\pi; 2\pi]$  les solutions des inéquations :

$$\tan x < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

---

## Exercices et problèmes

### Exercice 1

Soit  $x$  un nombre réel de l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

On pose :

$$A = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos^3 x$$

1. Calculer  $A$  en fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$ , puis montrer que

$$A = (2 - \cos^2 x)^2$$

2. Déterminer la valeur de  $A$  sachant que  $\tan x = \sqrt{3}$ .

## Exercice 2

Soit  $x$  un nombre réel de l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

On pose :

$$B = 3 \cos(\pi - x) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 5 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(\pi - x) + 2$$

1. Montrer que :

$$B = -3 + 2 \cos^2 x$$

2. Montrer que :

$$B = \frac{-1 - 3 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

3. Déterminer les valeurs de  $\cos x$  et  $\sin x$  sachant que

$$B = -\frac{3}{2}$$

puis en déduire la valeur de  $x$  (en radians).

## Exercice 3

Soit  $x$  un nombre réel différent de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

1. Calculer  $\tan x$  sachant que :

$$\cos \frac{2\pi}{3} + \tan(\pi + x) + \sin \frac{3\pi}{2} =$$

2. Calculer, en fonction de  $\sin x$ , l'expression suivante :

$$\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} +$$

3. Résoudre dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  l'équation :

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

4. Résoudre dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation :

$$2 \sin x - \sqrt{2} \leq 0$$

#### Exercice 4

1. a) Montrer que quel que soit  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

- b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

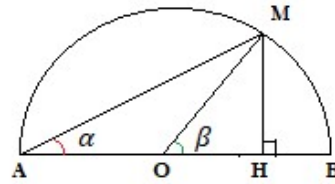
$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Résoudre dans  $] -\pi ; \pi[$  le système :

$$\begin{cases} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin x \times \cos x \geq 0 \end{cases}$$

#### Exercice 5

La figure ci-dessous représente un demi-cercle de centre  $O$ , de diamètre  $[AB]$  et de rayon 1.



- Calculer  $\cos \alpha$  en utilisant chacun des deux triangles  $HAM$  et  $MAB$ .
- Montrer que :  $AH = 1 + \cos \beta$

3. En déduire que :  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos \beta}{2}$

4. Comparer  $\alpha$  et  $\beta$ . En déduire que si  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ , alors

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

## 5. Application

a) Montrer que :

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

b) Vérifier que :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

c) Calculer  $\sin \frac{\pi}{12}$  et  $\tan \frac{\pi}{12}$ .

www.salimaths.com