Transformations usuelles

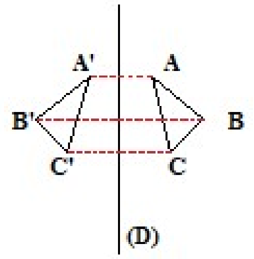
Contenu	Capacités attendues
▪ Symétrie axiale ▪ Symétrie centrale ▪ Translation ▪ Homothétie	Utilisation de la translation, de l'homothétie et de la symétrie dans la résolution de problèmes géométriques

I. Symétrie axiale

Définition et propriétés:

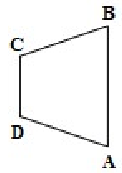
La symétrie axiale par rapport à une droite (D) appelée axe de symétrie transforme chaque point M en un point M' tel que la droite (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.

- Elle conserve les distances et les angles.
- Elle conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.
- Une figure et son image sont symétriques par rapport à l'axe.
- Si un point est sur l'axe, son image coïncide avec lui-même.



Applications:

1) Recopier la figure ci-contre.
   Construire l'image de ABCD
   par la symétrie axiale d'axe (CD)



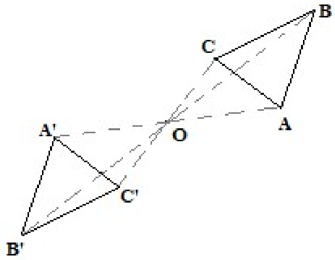
2) ABC un triangle rectangle dans A et O le milieu de [BC].
   1. Construire les points I et J images respectives de O par les symétries axiales d'axes (AB) et (AC).
   2. Montrer que $\widehat{OAB} = \widehat{BAI}$ et $\widehat{OAC} = \widehat{CAJ}$
   3. En déduire que I, A et J sont alignés.

II. symétrie centrale

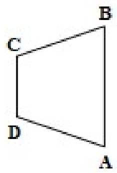
Définition et propriétés :

La symétrie centrale par rapport à un point O transforme chaque point M en un point M′ tel que O est le milieu du segment [MM′].

- Elle conserve les distances et les angles.
- Elle conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.
- Chaque figure et son image sont superposables après rotation de 180° autour de O.
- Si un point coïncide avec le centre O, il reste fixe.



Applications:



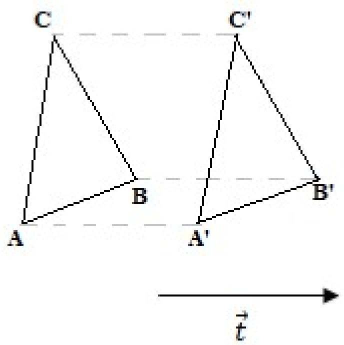
1) Recopier la figure ci-contre.
   Construire l'image de ABCD par la symétrie centrale de centre I le milieu de [AD]
2) Soient ABC un triangle, A' le milieu de [BC], J le symétrique de I par rapport au point A' et K le symétrique de J par rapport au point C.
   1. Construire la figure
   2. Montrer que $IBJC$ est un parallélogramme
   3. Montrer que :

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CK} \ \ et\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IK}$$

III. Translation

Définition et propriétés :
La translation T de vecteur $\vec{t}$ transforme chaque point M en un point M′ en déplaçant tous les points d'une même distance dans la même direction.

$$T(M) = M'\ c'est\ à\ dire\ \overrightarrow{MM'} = \vec{t}$$



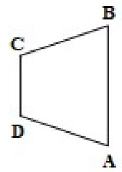
- Elle conserve les distances et les angles.
- Elle conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.
- Les figures restent de même forme et de même taille, simplement déplacées.
- Les segments parallèles restent parallèles.

Applications:

1) Recopier la figure ci-contre.

   Construire l'image de ABCD

   par la translation de vecteur $2\overrightarrow{BC}$



2) Soit A et B deux points du plan P.

   à tout point M on associe le point M' tel que :

$$2\overrightarrow{M'A} - 2\overrightarrow{M'B} + 3\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$$

   1. Montrer que la transformation t qui au point M associe le point M' est une translation dont on déterminera le vecteur.
   2. Construire l'image par t du cercle de centre A et de rayon 2.

IV. Homothétie

Définition :

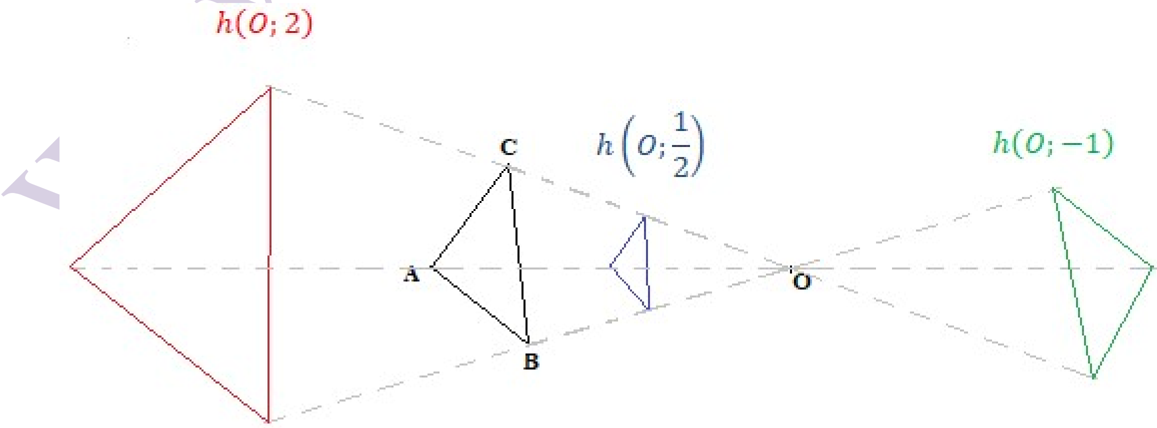
Soient O un point du plan et k un réel non nul.

L'homothétie h de centre O et de rapport k est la transformation plane qui transforme chaque point M en M′ tel que : $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$

Et on écrit $h(M) = M'$.

Et on a :

- Si $|\ k\ | > 1$, la figure s'agrandit.
- Si $0 < |\ k\ | < 1$, la figure se réduit.
- Si $k < 0$, l'image est opposée par rapport au centre.



Exercice :

Soient A et B deux points de plan P et I le milieu de [AB].

Soit h la transformation plane qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 5\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}$$

Montrer que h est une homothétie de contre I et déterminer son rapport.

1) Propriété caractéristique de l'homothétie

<u>Activité</u> :

Soit $h(O; 3)$ une homothétie de centre O et de rapport 3.

Soient A et B deux distincts du plan tels que : $h(A) = A' \;\; et \;\; h(B) = B'$

1) Construire la figure
2) Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = 3\overrightarrow{AB}$

<u>Propriété</u> :

Soit k un nombre réel non nul et différent de 1.

Pour qu'une transformation plane h soit une homothétie de rapport k il fait et il suffit que quels que soient les points M et N d'images respectives M' et N' par h, on ait : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

<u>Application</u> :

1) Soient A et B deux points distincts du plan.

   Soit $h(O\,; \frac{3}{2})$ l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$

   A' et B' les images respectives de A et B par h

   Montrer que $(AB)//(A'B')$
2) Soit ABCD un carré de centre O.

   Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD] et E le symétrique de I par rapport à A.

   On considère l'homothétie $h(I\,;\; 2)$.

   1. Construire la figure
   2. Déterminer $h(A) et\ h(O)$
   3. En déduire que $\overrightarrow{EJ} = 2\overrightarrow{AO}$

2) L'homothétie et la distance

Activité :

Soit $h(O;k)$ une homothétie de centre O et de rapport k.

Soient A et B deux distincts du plan tels que : $h(A) = A' \ \ et \ \ h(B) = B'$

Montrer que $A'B' = |k|AB$

Propriété :
Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

Si A' et B' sont les images respectives de A et B par h alors :$A'B' = |k|AB$

Application :
Soient ABCD un carré de côté 3 et O un point du plan.

On considère $h(O;2)$ l'homothétie de centre O et de rapport 2.

Soient A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D par h.

1) Construire la figure
2) Montrer que A'B'C'D' est un carré
3) Calculer l'aire du carré A'B'C'D'.

3) Homothétie et alignement

Activité :

Soit $h(O;3)$ une homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.

Soient A, B et C trois points distincts du plan tels que : $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$

et A' et B' et C' les images respectives de A, B et C par h

Montrer que $\overrightarrow{A'C'} = 3\overrightarrow{A'B'}$

Propriété :

Soient k un réel et A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$

Si A', B' et C' sont les images respectives de A, B et C par une homothétie

alors $\overrightarrow{A'C'} = k.\overrightarrow{A'B'}$

Application :
Soit ABC un triangle.

Soient I le milieu de [BC] et D un point tel que : $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

On considère $h(A;3)$ l'homothétie de centre A et de rapport 3.

Soient B', C', D' et J les images respectives de B, C, D et J par h.

1) Construire la figure

2) Montrer que $\overrightarrow{C'D'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{C'B'}$

3) Montrer que J est le milieu de [B'C']

4) Images d'un segment, une droite, un cercle et d'un angle par une homothétie

Propriétés :

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

Si A', B' et C'sont les images respectives de A, B et C par h alors :

- L'image du segment [AB] par h est le segment [A'B'] et l'image du milieu de [AB] par h est le milieu de [A'B']
- L'image de la droite (AB) est la droite (A'B')
- L'homothétie conserve la mesure des angles géométriques $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$
- L'image du cercle C de centre A et de rayon r par h est le cercle C' de centre A' et de rayon $k.r$

Application :

Soit $h(O\,;-3)$ une homothétie de centre O et de rapport -3

1) Déterminer l'image du cercle $C(O\,;2)$ par h

2) Déterminer l'image du cercle $C(A\,;5)$ par h tel que A est un point du plan.