

Statistique

Contenu	Capacités attendues
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Vocabulaire et notations ▪ Graphiques statistiques ▪ Caractéristiques de position d'une série statistique ▪ Caractéristiques de dispersion d'une série statistique 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Organisation de données statistiques ▪ Lecture de graphique statistique et son interprétation ▪ Interprétation des caractéristiques de position et de dispersion ▪ Distinguer les différentes caractéristiques

I. Vocabulaire et notations

- **Population statistique** : C'est l'ensemble sur lequel va porter l'étude statistique.
- **Echantillon** : Sous-ensemble de la population.
- **Unité statistique** : Tout élément de l'ensemble étudié
- **Caractère** : Dit aussi variable c'est la propriété qui fait l'objet de l'étude. Ce caractère est soit quantitatif (taille, poids..etc) soit qualitatif (couleur, marque..etc)
- **Effectif** : le nombre d'unités correspondant à un caractère étudié x_i
- **Effectif cumulé** : le nombre d'unités pour lesquelles la valeur du caractère est inférieure ou égale à x_i et on écrit : $N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i$
- **Effectif total** : La somme de tous les effectifs correspondants à toutes les valeurs du caractère étudié.
- **Série statistique** : l'ensemble des couples $(x_i; n_i)$ qui sont présentées dans un tableau statistique comme suit :

Caractère x_i	x_1	...	x_i	...	x_p
Effectif n_i	n_1	...	n_i	...	n_p
Effectif cumulé N_i	N_1	...	N_i	...	N_p

Si le caractère prend beaucoup de valeurs, on groupe ces valeurs dans des intervalles de même amplitude qui sont appelés classes.

Classe I_i	$[a_0; a_1[$...	$[a_i; a_{i+1}[$...	$[a_{p-1}; a_p[$
Effectif n_i	n_1	...	n_i	...	n_p
Effectif cumulé N_i	N_1	...	N_i	...	N_p

Exemple et application : Le relevé suivant contient les notes obtenues par les élèves d'une classe en mathématiques.

- La population statistique est l'ensemble des élèves
- chaque élève est une unité statistique.
- Le caractère est la note qui est quantitative.

4	11	6	10	12	15	10	9
7	13	11	8	13	5	14	8
12	10	12	10	8	10	9	12
7	14	11	4	8	12	6	10
7	14	8	6	10	11	6	9

Tableau statistique :

Caractère (Note)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectif	2	1	4	3	5	3	7	4	5	2	3	1
Effectif cumulé	2	3	7	10	15	18	25	29	34	36	39	40

- Les valeurs du caractère sont $x_1 = 4$; $x_2 = 5$; $x_{11} = 14$
- Le nombre d'élèves qui ont obtenu la note $x_1 = 4$ est $n_1 = 2$ c'est l'effectif de la valeur $x_1 = 4$
- Le nombre d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 9 est :

$$N_6 = n_1 + n_2 + \dots + n_6 = 2 + 1 + 4 + 3 + 5 + 3 = 18$$

c'est l'effectif cumulé correspondant à la valeur $x_6 = 9$.

✚ L'effectif total est $N = 40$ c'est le nombre d'élèves de la classe.

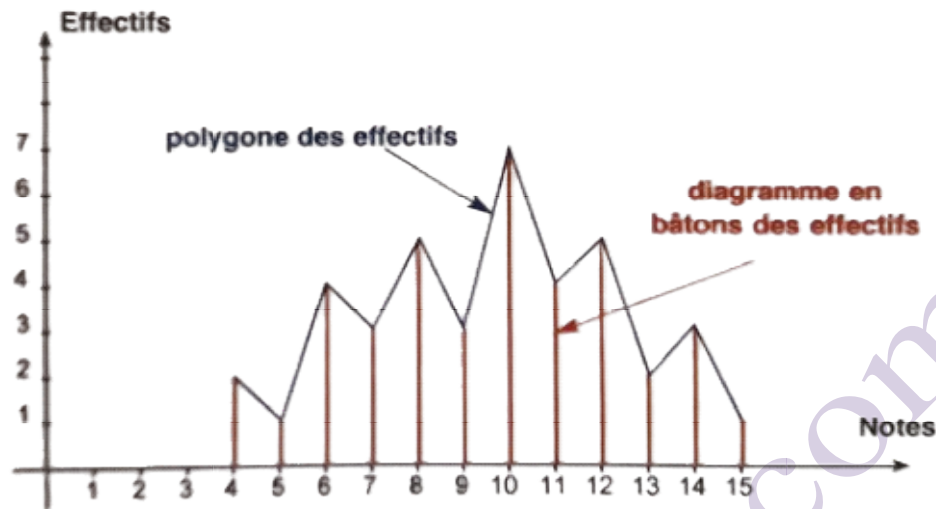
✚ Regroupement en classes : Groupons les notes dans des classes d'amplitude 5

Classe	[0 ;5[[5 ;10[[10 ;15[[15 ;20[
Effectif	2	16	21	1
Effectif cumulé	2	18	39	40

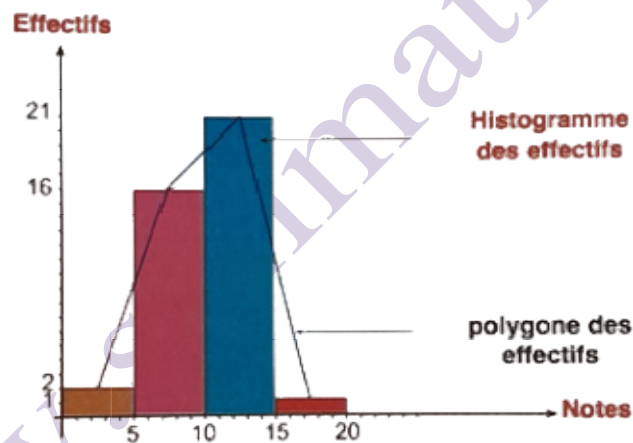
II. Représentation graphique

Si les tableaux statistiques nous fournissent des données numériques utiles pour avoir des informations, la traduction de ces tableaux par des représentations graphiques nous permet de présenter ces données de manière plus suggestive et de se faire une idée globale du phénomène étudié.

- Représentons la série statistique $(x_i; N_i)$ dans l'exemple précédent (x_i est la note et n_i le nombre d'élèves) :



- Représentons la série statistique définie par les classes $(I_i; N_i)$ dans le même exemple (I_i est l'intervalle de notes et n_i le nombre d'élèves).



III. Caractéristiques de position

1. Le mode

a. **Définition :** Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif.

b. Exemple :

- Dans l'exemple précédent le mode est la note 10 qui a le plus grand effectif à savoir 7.
- En ce qui concerne la série définie par les classes de notes $(I_i; n_i)$ le mode est l'intervalle $[10; 15[$ qui a le plus grand effectif à savoir 21.

2. La médiane

- a. **Définition et propriété** : On considère une série statistique dont les valeurs du caractère sont rangées par ordre croissant.
- ✚ La valeur du caractère qui partage l'effectif total en deux parties de même effectif est appelée médiane de la série statistique.
 - ✚ La plus petite valeur du caractère dont l'effectif cumulé est supérieur ou égal à la moitié de l'effectif total est une médiane de la série statistique.
 - ✚ Dans le cas d'une série $(I_i; n_i)$ définie par des classes (c. à. d intervalles $[a_i; a_{i+1})$), on applique la même formule ;
 - ✚ le mais x_i représente le centre de la classe I_i c. à. dire $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$

- b. **Exemple** : Dans l'exemple précédent

Caractère (Note)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectif	2	1	4	3	5	3	7	4	5	2	3	1
Effectif cumulé	2	3	7	10	15	18	25	29	34	36	39	40

L'effectif total est 40, sa moitié est 20

La plus petite valeur du caractère dont l'effectif cumulé est supérieure ou égal à 20 est 10 donc la médiane de cette série statistique est 10.

- c. **Application** : Déterminer la médiane de la série statistique suivante :

Taille en cm	150	160	170	180	190
Nombre d'élèves	3	11	5	7	2

3. La moyenne

- a. **Définition et propriété** : Soit $(x_i; n_i)$ une série statistique ($1 \leq i \leq p$) d'effectif total N. La moyenne arithmétique de cette série statistique est le nombre :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N}$$

N.B : Dans le cas d'une série $(I_i; n_i)$ définie par des classes

(c. à. d intervalles $[a_i; a_{i+1})$), on applique la même formule mais x_i

représente le centre de la classe I_i c. à. dire $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$

b. Exemples

1) Soit la série statistique :

caractère	2	7	4	10	11
effectif	3	2	10	25	12

L'effectif total est $N = 3 + 2 + 10 + 25 + 12 = 52$

La moyenne arithmétique est :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 3 + 7 \times 2 + 4 \times 10 + 10 \times 25 + 11 \times 12}{52} = 8,5$$

2) Soit la série statistique :

caractère	[1; 2[[2; 3[[3; 4[[4; 5[
effectif	2	3	10	5

L'effectif total est $N = 2 + 3 + 10 + 5 = 20$

Les centres des classes sont : 1,5 ; 2,5 ; 3,5 et 4,5

La moyenne arithmétique est :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 1,5 + 3 \times 2,5 + 10 \times 3,5 + 5 \times 4,5}{20} = 3,4$$

c. Application

1) La direction de la météo a enregistré les températures quotidiennes dans une ville pendant le mois de décembre. Ci-dessous la répartition de ces températures

températures	0	1	3	5	8	10	15
Nombre de jours	2	4	9	5	8	2	1

1. Déterminer l'effectif total.

2. Déterminer la température moyenne.

2) Le tableau suivant donne la répartition de 30 jeunes adhérents à un club selon leurs âges :

âge	[8; 10[[10; 12[[12; 14[[14; 16[
Nombre de jeunes	10	4	11	7

1. Déterminer l'effectif total.

2. Déterminer les centres des classes

3. Calculer la moyenne des âges

IV. Caractéristiques de dispersion

a. Définition et propriété :

Soit $(x_i; n_i)$ une série statistique ($1 \leq i \leq p$ d'effectif total N et de moyenne arithmétique \bar{x}).

- L'écart moyen de cette série statistique est :

$$e = \frac{n_1|x_1 - \bar{x}| + n_2|x_2 - \bar{x}| + \dots + n_p|x_p - \bar{x}|}{N}$$

- La variance est :

$$v = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}$$

$$v = \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_px_p^2}{N} - \bar{x}^2$$

- L'écart type est : $\sigma = \sqrt{v}$

b. Application

1) Le tableau suivant donne le nombre d'accidents de la circulation par jour dans une ville pendant 50 jours.

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4
Nombre de jours	20	19	7	3	2

2. Déterminer l'effectif total.
3. Déterminer la moyenne arithmétique.
4. Calculer l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série statistique.

Exercice :

Les élèves d'un tronc commun scientifique ont obtenu les notes suivantes dans un devoir de mathématique :

7 - 11 - 10 - 12 - 9 - 12 - 15 - 10 - 8 - 12 - 12 - 11 - 14 - 15 - 12 - 8 - 12 - 14 - 8 - 7
--

- 1) Former un tableau statistique des effectifs et des effectifs cumulés
- 2) Déterminer le mode, la médiane et la moyenne des notes des élèves de cette classe.
- 3) Interpréter chaque valeur obtenue.

- 4) Calculer l'écart moyen et la variance
- 5) En déduire l'écart type de cette série statistique.
- 6) Interpréter les résultats.

www.salimaths.com