Produit scalaire

Contenu	Capacités attendues
▪ Produit scalaire de deux vecteurs ▪ Formule trigonométrique du produit scalaire ▪ Propriétés du produit scalaire ▪ Relations métriques dans un triangle	▪ Exprimer la distance et l'orthogonalité au moyen du produit scalaire ▪ Utilisation du produit scalaire dans la résolution des problèmes ▪ Utilisation du théorème d'Al-Kashi et du théorème de la médiane dans la résolution des systèmes

I. Produit scalaire de deux vecteurs

a. Définition

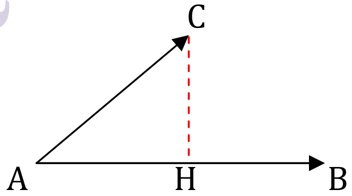
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ **et** $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ est le nombre réel que l'on note $\vec{u}.\vec{v}$ et qui est défini par :

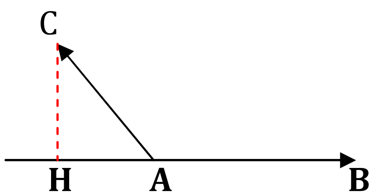
- Si $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ Ont le même sens

  Alors $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AH$



- Si $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ Ont des sens contraires

  Alors $\vec{u}.\vec{v} = -AB \times AH$



- Si H est confondu avec A

  Alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

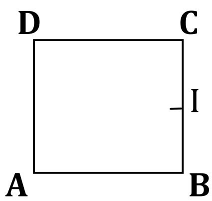
  (c'est-à-dire $(AB) \perp (AC)$)

b. Exercice

Soit ABCD un carré de coté de longueur 4cm

Soit I le milieu de [BC]

Calculer : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{ID}$



II. Formule trigonométrique du produit scalaire

a. **Activité :** Soit ABC un triangle du plan P.

Soit α une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

On pose : $d = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

1) Si ABC est rectangle en A. Quelle est la valeur de d ?

2) On suppose que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

a. Montrer que $AC^2 = CH^2 + AH^2\ et\ BC^2 = CH^2 + BH^2$

b. En déduire que $d = AB \times AH$

c. Montrer $d = AB \times AC \times cos\ \alpha$

3) On suppose $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$

a. Montrer que $d = -AB \times AH$

b. Montrer $d = AB \times AC \times cos\ \alpha$

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan tels que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}\ et\ \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

Soit α une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

On a : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\alpha$

$$(ou\ encore\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos\ \widehat{BAC})$$

Applications

1) Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3\ ;\ AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$

   Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) Soit ABC un triangle tel que : $AB = 5\ ;\ AC = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6$

   Calculer cos $(\widehat{BAC})$

3) Soit ABC un triangle tel que $AB = 3\ ;\ AC = \sqrt{21}\ et\ BC = 4\sqrt{3}$

   a. Calculer cos $(\widehat{ABC})$ et en déduire la mesure de $(\widehat{ABC})$

   b. Calculer cos $(\widehat{BAC})$ et cos $(\widehat{ACB})$

III. Propriétés du produit scalaire

a. **Propriétés**

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout nombre réel k.

On a :

- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}\,.\,(\mathrm{k}\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = ||\vec{u}\,||^2 + 2\vec{v}.\vec{u} + ||\vec{v}||^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = ||\vec{u}\,||^2 - 2\vec{v}.\vec{u} + ||\vec{v}||^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \left||\vec{u}|\right|^2 - ||\vec{v}||^2$
- Pour que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux il faut et il suffit que : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$
- Si $k > 0$ alors $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ont la même direction et le même sens et $\left||\vec{u}|\right| = k\left||\vec{v}|\right|$
- Si $k < 0$ alors $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ont la même direction, des sens contraires et $\left||\vec{u}|\right| = -k\left||\vec{v}|\right|$

b. **Applications :**

1) Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\left||\vec{u}|\right| = 2; \left||\vec{v}|\right| = 3$ *et* $\vec{u}.\vec{v} = -4$

   Calculer :

$$(3\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-2\,\vec{v})$$
$$(\vec{u}+\vec{v})^2 + (\vec{u}-\vec{v})^2$$
$$(\vec{u}+\vec{v})^2 - (\vec{u}-\vec{v})^2$$
$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$$

2) Soit ABC un triangle tel que : $AB = 1\,, AC = 3$ *et* $(\widehat{BAC}) = \frac{2\pi}{3}$

   Soit I le milieu de [AB]

   1. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{-3}{2}$
   2. Soit E le point défini par $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$
      a. Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ puis calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$
      b. Montrer que $(AB) \perp (IE)$

IV. Relations métriques dans un triangle

1. Théorème d'Al-Kashi

a. <u>Activité</u>

Soit ABC un triangle.

Montrer que $BC = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

b. <u>Propriété</u>

Soit ABC un triangle.

On a : $BC = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

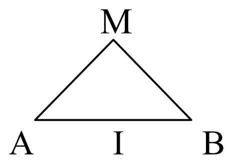
c. <u>Application</u>

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 7$; $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$

Calculer BC et $\cos(\widehat{ACB})$

2. Théorème de la médiane

a. <u>Activité</u>



Soient A et B deux points distincts du plan

I le milieu de [AB] et M un point du plan.

1) Montrer que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

En déduire que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

2) Montrer que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

En déduire que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

3) En utilisant les deux relations $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$

Montrer que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

b. <u>Propriété</u>

Soient A et B deux points du plan, I le milieu de [AB] et M un point du plan.

On a :

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

c. Application

Soit ABC un triangle tel que : $AB = AC = 7 \; et \; BC = 5$

Soient I, J et K les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

Calculer les distances AI, BJ et CK

3. Relations métriques dans un triangle rectangle

a. Activité

Soient ABC un triangle rectangle en A, H le projeté orthogonal de A sur (BC) et A' le milieu de [BC].

Montrer que :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $AA' = \frac{1}{2}BC$
- $BA^2 = BH \times BC$
- $AH^2 = BH \times HC$

Propriété

Soient ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC) et A' le milieu de [BC].

Pour que ABC soit rectangle en A il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $AA' = \frac{1}{2}BC$
- $BA^2 = BH \times BC$
- $AH^2 = BH \times HC$

b. Application

Soient ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

On suppose que : $AH = 2$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$

Calculer AB ; AC ; BC ; $BH \; et \; CH$

4. Aire d'un triangle et formule des sinus

a. Activité

Soit ABC un triangle tel que $AB = c\ ;\ AC = b\ et\ BC = a$

Soient H le projeté orthogonal de C sur (AB) et S l'aire du triangle ABC.

1) Montrer que $HC = b\ sin\ \hat{A}$

En déduire que $S = \frac{1}{2}bc\ sin\hat{A}$

3) Montrer que $S = \frac{1}{2}bc\ sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\ sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\ sin\hat{C}$

En déduire que $\frac{sin\hat{A}}{a} = \frac{sin\hat{B}}{b} = \frac{sin\hat{C}}{c} = \frac{2S}{abc}$

b. Propriété

Soit ABC un triangle tel que $AB = c\ ;\ AC = b\ et\ BC = a$

Soit S l'aire du triangle ABC.

On a :

$$S = \frac{1}{2}bc\ sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\ sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\ sin\hat{C}$$

$$\frac{sin\hat{A}}{a} = \frac{sin\hat{B}}{b} = \frac{sin\hat{C}}{c} = \frac{2S}{abc}$$

c. Applications

1) Soit ABC un triangle tel que : $AB = AC; BC = 5\sqrt{3}\ et\ \widehat{ABC} = \frac{3\pi}{4}$

Calculer l'aire du triangle ABC

2) Calculer l'aire d'un parallélogramme ABCD sachant que :

$AB = 5$; $BC = 7$ et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$

3) Soit ABC un triangle tel que : $\hat{A} = 60°;\ \hat{B} = 80°\ et\ BC = 4$

1. Calculer AB et AC
2. Calculer l'aire du triangle ABC