

Contenu	Capacités attendues
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Repère – Coordonnées d'un point et d'un vecteur ▪ Condition de colinéarité de deux vecteurs ▪ Représentation paramétrique d'une droite ▪ Equation cartésienne d'une droite ▪ Equation d'une droite et son coefficient directeur ▪ Positions relatives de deux droites 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Traduction des notions et des propriétés de la géométrie affine et de la géométrie vectorielle au moyen des coordonnées ▪ Utilisation de l'outil analytique dans la résolution des problèmes géométriques

I. Le repère – les coordonnées (rappel)

a. Définitions :

Soit O un point et \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs non colinéaires dans le plan tels que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

- Le triplet (O, \vec{i}, \vec{j}) est dit repère dans le plan
- Le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est dit orthonormé si $(OI) \perp (OJ)$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$
- La droite (OI) est appelée l'axe des abscisses et la droite (OJ) est appelée l'axe des ordonnées
- Pour tout point M du plan il existe un couple unique (x, y) tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Le couple (x, y) est dit couple des coordonnées du point M et on écrit $M(x, y)$

- Pour tout vecteur \vec{u} du plan il existe un couple unique (a, b) tel que :

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

Le couple (a, b) est dit couple des coordonnées du point M et on écrit $M(x, y)$

- Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

- Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ et de $k\vec{u}$:
Si $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(a', b')$ alors $\vec{u} + \vec{v}(a + a', b + b')$ et de $k\vec{u}(ka, kb)$
- Coordonnées du milieu d'un segment :
Si I est le milieu de [AB] alors $I\left(\frac{x_B+x_A}{2}, \frac{y_B+y_A}{2}\right)$
- Egalité de deux vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(a', b')$:
Si $\vec{u} = \vec{v}$ alors $a = a'$ et $b = b'$
- Colinéarité de deux vecteurs :
 $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(a', b')$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $a = ka'$ et $b = kb'$
- La distance AB : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- La norme d'un vecteur $\vec{u}(a, b)$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

b. Exercice :

Soient les points $A(1; -3)$ et $B(7; 2)$ et les vecteurs $\vec{u}(-5; 1)$ et $\vec{v}(2a - 1, 3 + 2b)$ avec a et b de R.

1) Déterminer les coordonnées de :

1. Le vecteur \overrightarrow{AB} ,
2. Le vecteur $2\vec{u} - 3\overrightarrow{AB}$
3. Le milieu I de [AB]

2) Déterminer a et b pour que $\vec{v} = 2\vec{u} - 3\overrightarrow{AB}$

II. Condition de colinéarité de deux vecteurs

a. Activité : Soit $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On considère les deux vecteurs non nuls $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(a'; b')$.

1) Montrer que : si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $ab' - a'b = 0$

2) Montrer que : si $ab' - a'b = 0$ alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

Le nombre $ab' - a'b$ est appelé déterminant des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} (dans cet ordre) et on le note $det(\vec{u}; \vec{v})$

et on écrit $det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

3) On considère les vecteurs : $\vec{u}(3; -4)$ et $\vec{v}(2; 1)$ et $\vec{w} = x\vec{i} + 8\vec{j}$

1. les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont-ils colinéaires ?
2. Déterminer la valeur de x pour que \vec{u} et \vec{w} soient colinéaires.

b. Définition et propriété :

Soient $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(a'; b')$ deux vecteurs non nuls.

- Le nombre réel $ab' - a'b$ est appelé déterminant des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} et on le note $det(\vec{u}; \vec{v})$ et on écrit :

$$det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

- $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(a'; b')$ sont colinéaires si et seulement si :

$$det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

c. Application :

Soient les points $A(1; -2)$, $B(5; -4)$, $C(2; \frac{-5}{2})$ et $D(-3; y)$.

- 1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
- 2) Déterminer y pour que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} soient colinéaires.

III. La droite dans le plan (étude analytique)

1) Représentation paramétrique d'une droite

a. Activité :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan.

On considère les points $A(-1; 2)$, $B(2; -5)$

Soit (D) la droite passant par A et B

- 1) Déterminer le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- 2) Soit $M(x; y)$ un point de (D)

- a. Montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

Le vecteur \vec{u} est appelé vecteur directeur de la droite (D)

- b. Montrer que :

$$\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 2 - 7k \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 2 - 7k \end{cases}$ est appelé représentation

paramétrique de la droite (D) passant par A et dirigée par \vec{u}

3) Donner la représentation graphique de la droite (Δ) passant par B et dirigée par $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$

b. Définition et propriété :

Soient $A(x_A; y_A)$ un point et $\vec{u}(a; b)$ un vecteur non nul du plan.

- L'ensemble des points M qui vérifient : $\overrightarrow{AM} = K\vec{u}$ où $k \in R$ est la droite passant par A et dirigée par \vec{u} et on la note $D(A; \vec{u})$
- Le système $\begin{cases} x = x_A + ak \\ y = y_A + bk \end{cases}$ (où $k \in R$) est appelé la représentation paramétrique de la droite $D(A; \vec{u})$

c. Applications :

On considère les points $A(-1; 3)$, $B(2; -5)$ et $C(-3; -1)$

- 1) Déterminer une représentation graphique de la droite (AB)
- 2) Le point C appartient-il à la droite (AB) ?
- 3) Déterminer une représentation graphique de la droite (D) passant par le point C et dirigée par le vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$
- 4) Déterminer une représentation graphique de la droite (D') passant par le point B et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1; -2)$
- 5) Déterminer une représentation graphique de la droite (D'') passant par le point A et dirigée par le vecteur \vec{i}

IV. Équation cartésienne d'une droite

a. Activité :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan.

et la droite $D(A; \vec{u})$ telle que $A(-1; 3)$ et $\vec{u}(2; -5)$

- 1) Soit $M(x; y)$ un point de la droite (D)

Montrer que $\begin{vmatrix} x + 1 & 2 \\ y - 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

En déduire que $5x + 2y - 1 = 0$

L'équation $5x + 2y - 1 = 0$ est appelée équation cartésienne de la droite (D)

- 2) On considère les points $B(-1; 1)$ et $C(3; -4)$.

Déterminer l'équation cartésienne de la droite (BC).

b. Définition et Propriété :

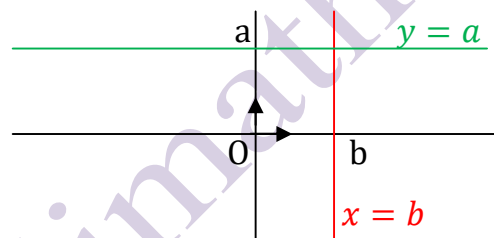
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Toute droite dans le plan admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où $(a; b) \neq (0; 0)$
- Soient a, b et c des nombres réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$
L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}(-b; a)$

Droites particulières :

Soient (D) une droite et a et b deux nombres réels.

- La droite (D) est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si son équation cartésienne est de la forme : $y = a$
- La droite (D) est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si son équation cartésienne est de la forme : $x = b$



c. Application :

1. Déterminer l'équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{u})$ dans chacun des cas suivants :
 - 1) $A(2; 7)$ et $\vec{u}(3; -1)$
 - 2) $A(0; 4)$ et $\vec{u}(1; -2)$
 - 3) $A(-1; 3)$ et $\vec{u} = \vec{j}$
 - 4) $A(-5; 9)$ et $\vec{u} = \vec{i}$
2. Soit (D) la droite d'équation : $2x - y + 3 = 0$
 - 1) Déterminer un point de (D) et le vecteur directeur de (D)
 - 2) Le point $M(-1; 1)$ appartient-il à (D) ?
 - 3) Donner l'équation cartésienne de la droite (D') parallèle à (D) et passant par le point $M(3; 5)$

V. Equation d'une droite et son coefficient directeur

a. Définition et propriété :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Pour qu'une droite (D) ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées il suffit qu'elle ait une équation cartésienne de la forme $y = mx + p$
 - Le nombre réel m s'appelle le coefficient directeur de (D)
 - Le nombre réel p s'appelle l'ordonnée à l'origine
 - L'équation $y = mx + p$ est l'équation réduite de (D)
- L'équation de la droite passant par le point $A(x_A; y_A)$ et de coefficient directeur m s'écrit sous la forme $y - y_A = m(x - x_A)$

b. Applications :

Déterminer l'équation réduite de la droite (D) passant par le point M et de coefficient directeur m dans chacun des cas suivants :

- 1) $A(2; 5)$ et $m = -3$
- 2) $A(-1; 3)$ et $m = 4$
- 3) $A(1; 0)$ et $m = -2$

VI. Positions relatives de deux droites dans le plan

1) Parallélisme de deux droites dans le plan

a. Propriété :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Pour que deux droites (D) et (D') d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ soient parallèles il suffit que $ab' - a'b = 0$
- Pour que deux droites (D) et (D') d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ soient parallèles il suffit que $m = m'$

b. Application :

On considère les droites suivantes :

$$(D): 2x - y + 1 = 0 ; (D'): 6x - 3y + 4 = 0 \text{ et } (\Delta): ax + y - 7 = 0$$

1. Montrer que $(D) // (D')$

2. Déterminer la valeur de a pour que $(\Delta) // (D)$
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ') passant par O et parallèle à (D)
4. Déterminer le nombre réel m pour que la droite (D) d'équation $y = (3m + 1)x - 5$ soit parallèle à la droite (D') d'équation $y = 7x - 11$

2) Intersection de deux droites dans le plan

a. Propriété :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Pour que deux droites (D) et (D') d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ soient Sécantes il suffit que $ab' - a'b \neq 0$

Le couple des coordonnées du point d'intersection de (D) et (D')

est la solution du système
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- Pour que deux droites (D) et (D') d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ soient parallèles il suffit que $m \neq m'$

Le couple des coordonnées du point d'intersection de (D) et (D')

est la solution du système
$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

b. Application :

Montrer que les droites (D) et (D') sont sécantes et déterminer le point d'intersection dans chacun des cas suivants :

1. $(D): 2x - y + 1 = 0$ et $(D'): x - 3y + 4 = 0$
2. $(D): x - y + 3 = 0$ et $(D'): 3x + y + 1 = 0$
3. $(D): y = 3x - 1$ et $(D'): y = -2x + 5$
4. $(D): y = x$ et $(D'): y = -x + 2$

www.salimaths.com