

## Fonctions numériques (Généralités)

Contenu	Capacités attendues
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Fonction numérique et son ensemble de définition</li> <li>▪ Représentation graphique d'une fonction numérique</li> <li>▪ Egalité de deux fonctions</li> <li>▪ Fonction paire et fonction impaire</li> <li>▪ Variations d'une fonction</li> <li>▪ Maxima et minima d'une fonction</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Reconnaître la variable et l'ensemble de définition d'une fonction définie par un tableau de données, par une courbe ou par une expression</li> <li>▪ Lecture de l'image d'un nombre et détermination d'un nombre dont l'image est donnée, à partir de la représentation graphique d'une fonction</li> <li>▪ Dédurre les variations d'une fonction ou les maxima et minima à partir de la représentation graphique</li> <li>▪ Utilisation de la représentation graphique pour résoudre certaines équations et inéquations</li> </ul>

### I. Fonction numérique et son domaine de définition

#### a. activité :

Sur la figure ci-contre.  $M$  un point qui décrit un demi-cercle ( $C$ ) de diamètre de longueur égale à 2.

On pose :  $AM = x$  et  $BM = f(x)$

1) Écrire la relation liant  $x$  et  $f(x)$

2) Calculer la distance  $BM$  si  $AM = \frac{3}{2}$

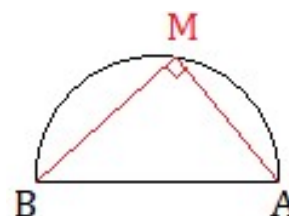
$f\left(\frac{3}{2}\right)$  est appelé image de  $\frac{3}{2}$  par la fonction  $f$

3) Quels sont les nombres réels  $x$  qui ont une image par la fonction  $f$  ?

L'ensemble de ces nombres est appelé ensemble de définition de la fonction  $f$  et on le note  $D_f$

4) Déterminer  $D_f$  dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \sqrt{x} ; f(x) = \frac{1}{x} ; f(x) = \sqrt{x+2} ; f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$$



**b. Définitions :**

- Une fonction numérique  $f$  d'une variable réelle  $x$  est une relation mathématique qui à chaque  $x$  associe au plus une image  $f(x)$  et on la note :  $f: Df \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} f: Df & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

- L'ensemble des nombres réels qui ont une image par la fonction  $f$  est appelé ensemble de définition de  $f$  et on le note  $Df$

**c. Exercice :**

Déterminer  $Df$  dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}; f(x) = \sqrt{x^2 - 4}; f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-25}; f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2x}; f(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x^2-2x}}; f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x^2-2x}}$$

## II. Représentation graphique d'une fonction

**a. Activité :**

Le plan est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit la fonction numérique  $f(x) = |x - 1| - 2|x|$

- 1) Ecrire  $f(x)$  sans le symbole de la valeur absolue
- 2) Représenter graphiquement la fonction  $f$
- 3) Déterminer les points qui appartiennent à la courbe de  $f$  parmi les points suivants  $A(2; 3)$ ,  $B(1; -2)$  et  $C(-2; -7)$
- 4) Déterminer le point  $D$  de la courbe de  $f$  dont l'abscisse est 5
- 5) déterminer les points  $E$  et  $F$  de la courbe de  $f$  dont l'ordonnée est  $-3$

**b. Définition :**

Le plan est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $f$  une fonction numérique

- La représentation graphique de la fonction  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  est constituée des points  $M(x; y)$  tels que

$$\begin{cases} x \in Df \\ y = f(x) \end{cases}$$

- La représentation graphique de  $f$  est appelée courbe de  $f$  et on la note  $(Cf)$

**c. Exercice :**

Représenter graphiquement la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3; & \text{si } x < -2 \\ -5; & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ -2x - 3; & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

### III. Égalité de deux fonctions

#### a. Définition :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques et  $D_f$  et  $D_g$  respectivement les domaines de définition de  $f$  et  $g$ .

On dit que  $f$  et  $g$  sont égales et on écrit  $f = g$  si et seulement si on a :

$$D_f = D_g \text{ et } \forall x \in D_f : f(x) = g(x)$$

#### b. Exercice :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques telles que :

$$f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x^2}} \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x}$$

Montrer que  $f = g$

### IV. Fonction paire et fonction impaire

#### a. Activité :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que :  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = x^3$

- 1) Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f(-x) = f(x)$  et  $g(-x) = -g(x)$
- 2) Représenter graphiquement  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans un repère orthonormé
- 3) En déduire les éléments de symétrie de  $(C_f)$  et  $(C_g)$

#### b. Définitions et propriétés :

Soit  $f$  une fonction numérique.

- On dit que  $f$  est une fonction paire si et seulement si :

$$\forall x \in D_f : -x \in D_f \text{ et } f(-x) = f(x)$$

- On dit que  $f$  est une fonction impaire si et seulement si :

$$\forall x \in D_f : -x \in D_f \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

- Si  $f$  est paire alors  $(C_f)$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées  $(OY)$
- Si  $f$  est impaire alors  $(C_f)$  est symétrique par rapport à l'origine du repère  $O$ .

c. Application :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques telles que :

$$f(x) = |x| \text{ et } g(x) = |x - 1| - |x + 1|$$

- 1) 1. Montrer que  $f$  est une fonction paire  
2. Représenter  $(C_f)$  dans un repère orthonormé
- 2) 1. Montrer que  $g$  est une fonction impaire  
2. Représenter  $(C_g)$  dans un repère orthonormé

V. Variations d'une fonction

1. Sens de variation d'une fonction

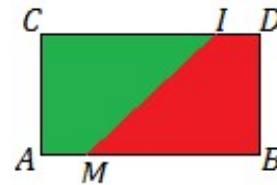
a. Activité :

Sur la figure ci-contre,  $ABCD$  est un rectangle de longueur  $AB = 4$  et de largeur  $BC = 3$ .

$I$  est un point de  $[DC]$  tel que  $IC = 1$

$M$  un point mobile sur  $[AB]$  de  $A$  vers  $B$

On pose  $AM = x$ .



Soit  $f(x)$  l'aire du domaine coloré en vert et  $g(x)$  l'aire du domaine coloré en rouge.

- 1) Calculer  $f(x)$  et  $g(x)$  en fonction de  $x$
- 2)  $M_1$  et  $M_2$  deux positions différentes de  $M$  sur  $[AB]$   
On pose  $AM_1 = x_1$  et  $AM_2 = x_2$  avec  $x_1 < x_2$   
Montrer que  $f(x_1) < f(x_2)$  et  $g(x_1) > g(x_2)$
- 3) Représenter graphiquement les fonctions  $f$  et  $g$
- 4) Soit  $h(x)$  l'aire du triangle  $MIC$ . Montrer que  $h(x_1) < h(x_2)$

b. Propriété :

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est croissante sur  $I$  si pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$ :

$$\text{si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) \leq f(x_2)$$

- $f$  est strictement croissante sur  $I$  si pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$ :  

$$\text{si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2)$$
- $f$  est décroissante sur  $I$  si pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$ :  

$$\text{si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) \geq f(x_2)$$
- $f$  est strictement décroissante sur  $I$  si pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$ :  

$$\text{si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) > f(x_2)$$
- $f$  est constante sur  $I$  si pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$ :  

$$\text{si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) = f(x_2)$$

c. Application :

1) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :

$$f(x) = 2x - 1 \text{ et } g(x) = -3x + 5$$

1. Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
2. Montrer que  $g$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
3. Représenter graphiquement  $f$  et  $g$

2) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x}$$

1. Déterminer  $D_f$  et montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $D_f$
2. Représenter graphiquement la fonction  $f$
3. Déterminer  $D_g$  et montrer que  $g$  est strictement décroissante sur  $D_g$
4. Représenter graphiquement la fonction  $g$

2. Taux de variation d'une fonction

a. Définition et propriété :

Soient  $f$  une fonction numérique et  $x_1$  et  $x_2$  deux éléments distincts de  $D_f$ .

Le nombre réel  $T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$  est appelé taux de variation de  $f$  entre

$x_1$  et  $x_2$  et on a :

Si pour tous  $x_1$  et  $x_2$  d'un intervalle  $I$  inclus dans  $D_f$

- $T \geq 0$  alors  $f$  est croissante sur  $I$
- $T > 0$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$
- $T \leq 0$  alors  $f$  est décroissante sur  $I$

- $T < 0$  alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$
- $T = 0$  alors  $f$  est constante sur  $I$

**b. Application :**

Soient les fonctions

$$f(x) = 3x - 5 ; g(x) = -5x + 3 ; h(x) = x^2 + 2x \text{ et } k(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$$

- 1) 1. Déterminer le taux de variation de  $f$  et  $g$ 
  2. En déduire la monotonie de  $f$  et de  $g$  sur  $\mathbb{R}$
- 2) 1. Déterminer  $Dh$  et le taux de variation de  $h$ 
  2. En déduire les variations de  $h$  sur  $] -\infty ; -1]$  et  $[-1 ; +\infty[$
- 3) 1. Déterminer  $Dk$  et le taux de variation de  $k$ 
  2. En déduire les variations de  $k$  sur  $Dk$

## VI. Monotonie et parité d'une fonction

**a. Activité :**

Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition  $Df$  est symétrique par rapport à 0.

Soient  $I$  un intervalle inclus dans  $Df$  et  $I'$  le symétrique de  $I$  par rapport à 0.

- 1) On suppose que  $f$  est paire. Montrer que
  - a. Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors  $f$  est décroissante sur  $I'$
  - b. Si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors elle est croissante sur  $I'$
- 2) On suppose que  $f$  est impaire. Montrer que  $f$  garde le même sens de variation sur  $I$  et  $I'$

**b. Propriété :**

Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition  $Df$  est symétrique par rapport à 0.

Soient  $I$  un intervalle inclus dans  $Df$  et  $I'$  le symétrique de  $I$  par rapport à 0.

- Dans le cas où  $f$  est paire, on a :
  - Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors  $f$  est décroissante sur  $I'$
  - Si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors  $f$  est croissante sur  $I'$
- Dans le cas où  $f$  est impaire, on a :

○  $f$  a le même sens de variation sur  $I$  et  $I'$

**c. Application :**

1. On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x + \frac{2}{x}$

1) Déterminer  $D_f$  et montrer que  $f$  est impaire

2) Etudier les variations de  $f$  sur les intervalles :

$$I = ]0; \sqrt{2}] \text{ et } J = [\sqrt{2}; +\infty[$$

En déduire les variations de  $f$  sur :

$$I' = [-\sqrt{2}; 0[ \text{ et } J' = ]-\infty; -\sqrt{2}]$$

2.  $f$  est une fonction paire définie sur  $[-4; 4]$  et son tableau de variations sur  $[0; 4]$  est le suivant

$x$	0	1	3	4
$f$		2	2	0

Diagramme de variation : une flèche descendante de 0 à 1 (marquée -1), une flèche horizontale de 1 à 3 (marquée 2), et une flèche descendante de 3 à 4 (marquée 0).

Donner le tableau de variations de  $f$  sur  $[-4; 0]$

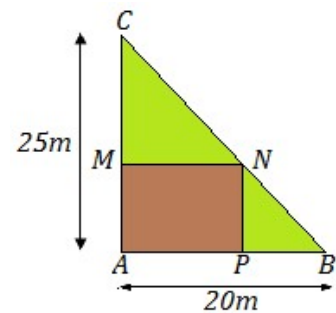
## VII. Maxima et minima d'une fonction

**a. Activité :**

Une personne possède un terrain sous la forme d'un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$ . Cette personne veut construire une maison rectangulaire  $AMNP$  inscrite dans le triangle  $ABC$  et ayant la plus grande aire possible.

On pose :  $AP = x$

Soit  $S(x)$  l'aire du rectangle  $AMNP$ .



1) Montrer que  $S(x) = \frac{5}{4}x(20 - x)$  pour tout  $x \in ]0; 20[$

2) a. Vérifier que  $S(x) = 125 - \frac{5}{4}(x - 10)^2$

b. En déduire que  $S(x) \leq 125$

c. Calculer  $S(10)$  puis en déduire les dimensions de la maison qui a la plus grande aire.

3) Soit  $S'(x)$  l'aire de la partie restante du terrain (partie colorée en vert)

a. Montrer que :  $S'(x) = 125 + \frac{5}{4}(x - 10)^2$

b. En déduire que  $S'(x) \geq 125$  et que la plus petite valeur de l'aire  $S'(x)$  est 125.

**b. Définition et propriété :**

Soient  $f$  une fonction numérique,  $I$  un intervalle inclus dans  $Df$  et  $a \in I$ .

- $f(a)$  est le maximum de  $f$  sur  $I$  signifie que  $f(x) \leq f(a)$  pour tout  $x$  de  $I$
- $f(a)$  est le minimum de  $f$  sur  $I$  signifie que  $f(x) \geq f(a)$  pour tout  $x$  de  $I$

**c. Application :**

1) On considère la fonction  $f(x) = x^2 - 4x + 7$

1. Vérifier que  $f(x) \geq 3$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$
2. Calculer  $f(2)$  et en déduire que 3 est le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

2) On considère la fonction  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1. Montrer que pour tout  $x$  de  $] -\infty; 0[$ :  $f(x) \leq -2$
2. Montrer que -2 est le maximum de  $f$  sur  $] -\infty; 0[$

3) Soit  $f$  une fonction définie par

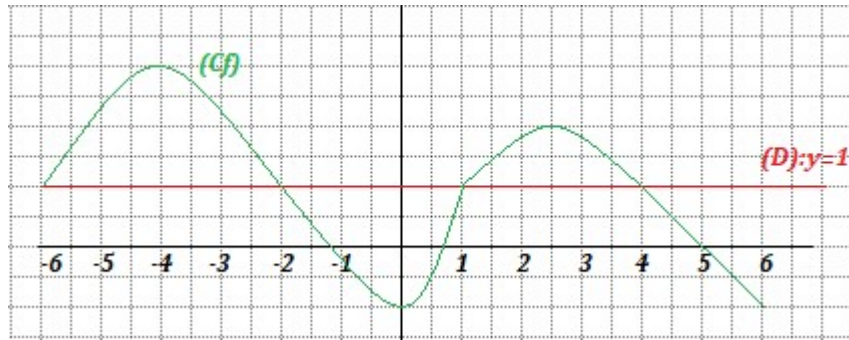
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } -4 \leq x \leq -1 \\ -x - 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 4 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

1. Donner le tableau des variations de  $f$
2. Déterminer les valeurs maximale et minimale sur chacun des intervalles  $[-4; 1]$  et  $[-1; 3]$

VIII. Résolution graphique d'équations de la forme  $f(x) = c$  et d'inéquations de la forme  $f(x) \leq c$  et  $f(x) \geq c$

**Exercice 1:**

Soit  $(D)$  une droite d'équation  $y=1$  et  $f$  une fonction numérique et sa courbe  $(Cf)$  comme suit :



- 1) Déterminer  $D_f$
- 2)
  1. Déterminer les points d'intersection de (D) et (Cf)
  2. Déterminer les réels  $x$  tels que  $f(x) = 1$
  3. Que peut-on déduire ?
- 3)
  1. Quels sont les intervalles de l'axe (OX) tels que (Cf) se trouve au-dessus de (D)
  2. Quels sont les réels  $x$  tels que  $f(x) \geq 1$
  3. Que peut-on déduire ?
- 4)
  1. Quels sont les intervalles de l'axe (OX) tels que (Cf) se trouve au-dessous de (D)
  2. Quels sont les réels  $x$  tels que  $f(x) \leq 1$
  3. Que peut-on déduire ?

**Exercice 2:**

Soit  $f$  une fonction numérique définie par :

$$f(x) = |x + 3| - 2$$

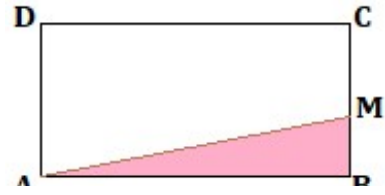
- 1) Exprimer  $f(x)$  sans valeur absolue selon les valeurs de  $x$ .
- 2)
  1. Construire la courbe (Cf) dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}; \vec{j})$
  2. Donner le tableau de variation de  $f$
- 3) Construire dans le repère  $(O ; \vec{i}; \vec{j})$  la droite (D) d'équation  $y = -3x$
- 4) Déterminer les points d'intersection de (Cf) et (D)
- 5) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :
  - L'équation :
 
$$f(x) = -3x$$
  - Les inéquations :
 
$$f(x) \leq -3x \text{ et } f(x) > -3x$$

**Exercice 3:**

Soit  $ABCD$  un rectangle de dimensions 3 et 6.

$M$  est un point en mouvement  
sur la trajectoire  $ABCD$ .

Soit  $x$  la distance parcourue  
par  $M$  et  $y$  l'aire de la partie colorée.



- 1) 1. Soit  $f$  la fonction qui à  $x$  associe  $y$ .  
Déterminer son domaine de définition.
2. Déterminer  $f(x)$  en fonction de  $x$ .
- 2) 1. Construire la courbe  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}; \vec{j})$
2. Quelle est la valeur maximale de  $f$
3. Résoudre graphiquement :
  - Les équations :  $f(x) = 2$  et  $f(x) = 20$
  - L'inéquation :  $f(x) > 4$