

| Contenu | Capacités attendues |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ▪ Équation du 2nd degré à une inconnue ▪ Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ ▪ Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ ▪ Inéquation du 2nd degré à une inconnue ▪ Somme et produit des solutions d'une équation du 2nd degré à une inconnue ▪ Détermination de deux nombres sachant leur somme et leur produit | <p>Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du 2nd degré à une inconnue</p> |

I. Équation et inéquation du 2nd degré à une inconnue

a. **Activité** : On considère dans IR l'équation (E): $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

1) Montrer que $ax^2 + bx + c = 0$ signifie que :

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} \right] = 0$$

L'écriture $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} \right]$ est appelée la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Il semble difficile de se rappeler cette forme canonique afin de l'utiliser dans la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Pour simplifier, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

Δ est appelé **discriminant** de (E).

$$\text{On a donc } ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2} \right]$$

2) On suppose que : $\Delta = 0$

Vérifier que $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ puis résoudre l'équation (E).

3) On suppose que : $\Delta > 0$

Vérifier que : $ax^2 + bx + c = a \left(x - \frac{-b+\Delta}{2a} \right) \left(x - \frac{-b-\Delta}{2a} \right)$ puis résoudre l'équation (E).

4) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans le cas où $\Delta < 0$.

5) Résoudre dans IR les équations suivantes :

$$-4x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$$

$$2x^2 + x + 3 = 0$$

b. Définition et propriété :

Une équation du second degré à une inconnue x est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Pour résoudre une telle équation, il faut tout d'abord calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

et on a :

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution dans \mathbb{R}
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution $x = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

c. Exemples :

1. On résout l'équation : $2x^2 - x + 1 = 0$

On a : $a = 2 ; b = -1$ et $c = 1$

Implique $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7$

Donc $\Delta < 0$ d'où l'équation n'a pas de solution dans \mathbb{R}

2. On résout l'équation : $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

On a : $a = 3 ; b = -2\sqrt{3}$ et $c = 1$

Implique $\Delta = b^2 - 4ac = 12 - 12 = 0$

Donc l'équation admet une seule solution $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. On résout l'équation : $3x^2 - 5x + 1 = 0$

On a : $a = 3 ; b = -5$ et $c = 1$

Implique $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 12 = 13$

Donc $\Delta > 0$ d'où l'équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$$

d. Applications : Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

1) $x^2 - 3x - 4 = 0$

2) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$

3) $x^2 + 3x + 5 = 0$

4) $-2x^2 + x + 1 = 0$

5) $-3x^2 + 2\sqrt{3} - 1 = 0$

6) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

II. Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

a. Propriété :

On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant

$$(\Delta = b^2 - 4ac).$$

- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme $P(x)$ ne peut pas être factorisé en produit de binômes du 1^{er} degré.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$

b. Exemples :

1. Le trinôme $P(x) = 2x^2 - x + 1$ ne peut pas être factorisé en produit de binômes du 1^{er} degré car $\Delta < 0$

2. Factorisons le trinôme $Q(x) = 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$

on a $\Delta = 0$ Donc $Q(x) = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 3 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

3. Factorisons le trinôme $R(x) = 3x^2 - 5x + 1$

on a $\Delta > 0$ et les solutions sont $x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$

Donc $R(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 3 \left(x - \frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right) \left(x - \frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right)$

c. Applications : Factoriser les trinômes suivants

- 1) $P(x) = 4x^2 + 5x + 1$
- 2) $Q(x) = x^2 - 2\sqrt{5}x - 4$
- 3) $R(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$
- 4) $K(x) = 5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1$
- 5) $S(x) = x^2 - 2x + 5$

III. inéquations du 2nd degré à une inconnue

a. Activité :

Soit le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Etudier le signe de $P(x)$ selon le signe du discriminant Δ .

b. Définition et propriété

- ✓ Toute inéquation du 2nd degré à une inconnue x peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$ax^2 + bx + c \leq 0 ; ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c > 0$$

- ✓ Signe du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta < 0$ alors :

| | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| <i>signe de $P(x)$</i> | <i>signe de a</i> | |

- Si $\Delta = 0$:

| | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|-----------------|--------------------------------|
| x | $-\infty$ | $\frac{-b}{2a}$ | $+\infty$ |
| <i>signe de $P(x)$</i> | <i>signe de a</i> | 0 | <i>signe de a</i> |

➤ Si $\Delta > 0$ alors :

| | | | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|----------|---------------------------------|-----------|--------------------------------|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ | |
| <i>signe de $P(x)$</i> | <i>signe de a</i> | 0 | <i>signe de $-a$</i> | 0 | <i>signe de a</i> |

x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$ tels que $x_1 < x_2$

b. Exemples :

1. On résout l'inéquation : $2x^2 - x + 1 > 0$

On a $\Delta < 0$ donc

| | | |
|---|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| <i>signe de $2x^2 - x + 1$</i> | + | |

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S =]-\infty; +\infty[$

2. On résout l'équation : $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 > 0$

On a $\Delta = 0$ donc

| | | | |
|--|-----------|----------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $+\infty$ |
| <i>signe de $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$</i> | + | 0 | + |

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =]-\infty; \frac{\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty[$$

3. On résout l'équation : $3x^2 - 5x + 1 \leq 0$

On a $\Delta > 0$ donc

| | | | | | |
|--|-----------|----------|-------|-----------|---|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ | |
| <i>signe de $3x^2 - 5x + 1$</i> | + | 0 | - | 0 | + |

$x_1 = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$ sont les solutions de l'équation

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = \left[\frac{5-\sqrt{13}}{6}; \frac{5+\sqrt{13}}{6} \right]$$

c. Applications : Résoudre les inéquations suivantes :

- 1) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$
- 2) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 \leq 0$
- 3) $x^2 + 3x + 5 > 0$
- 4) $-2x^2 + x + 1 < 0$

$$5) -3x^2 + 2\sqrt{3} - 1 > 0$$

$$6) 3x^2 - 2x - 1 < 0$$

IV. Somme et produit des solutions d'une équation du 2nd degré à une inconnue

- a. **Activité** : On considère dans \mathbb{R} l'équation (E): $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

On suppose que : $\Delta > 0$

et x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation.

Montrer que : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

- b. **Propriété** :

soit $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$, une équation du second degré à une inconnue x

Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions x_1 et x_2

On a : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

- c. **Application** :

On considère l'équation suivante :

$$(E) : 2x^2 - 3x - 11 = 0$$

- 1) Vérifier que (E) admet deux solutions x_1 et x_2 (sans calculer x_1 et x_2)
- 2) Calculer la somme $x_1 + x_2$ et le produit $x_1 x_2$

V. Détermination de deux nombres sachant leur somme et leur produit

- a. **Activité** : Soient s et p deux réels donnés. On considère dans \mathbb{R}^2 le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

- 1) Montrer que x et y vérifient l'équation : $t^2 - st + p = 0$
- 2) En déduire que le système (S) admet des solutions si $s^2 - 4p \geq 0$

- b. **Propriété** : Soient s et p de \mathbb{R} .

le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

admet des solutions si $s^2 - 4p \geq 0$

et On a x et y vérifient l'équation : $t^2 - st + p = 0$

- c. **Application** :

Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$$

Exercices

Ex1 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

- 1) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$
- 2) $2x^4 + 4x^2 - 6 = 0$
- 3) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$
- 4) $x + 9\sqrt{x} - 10 = 0$
- 5) $\sqrt{x^2 - 3x + 1} = x - 2$
- 6) $\frac{x^2+x+1}{x-1} = x + 2$

Ex2 : Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes

- 1) $(x + 3)(2x - 4) > 3x - 6$
- 2) $\frac{x+3}{2x-1} \geq 0$
- 3) $\frac{2x^2-x-1}{x^2+3x+2} < 0$
- 4) $\sqrt{x-3} = x - 7$

Ex3 : On considère dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$(E): 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$$

- 1) Vérifier que 0 n'est pas une solution de (E)
- 2) Montrer que (E) est équivalente à l'équation :

$$(E'): 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

- 3) On pose : $u = x + \frac{1}{x}$
 1. Calculer u^2 en fonction de x
 2. Montrer que (E') équivaut à :

$$2u^2 - 5u - 3 = 0$$

- 4) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2u^2 - 5u - 3 = 0$ et en déduire les solutions de (E).
- 5) En procédant de la même façon, résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(E_1): 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$(E_2): x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

$$(E_3): x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = 0$$

$$(E_4): 2(x + 1)^4 + 9(x + 1)^3 + 14(x + 1)^2 + 9(x + 1) + 2 = 0$$

Ex4 : On considère l'expression $F(x) = \frac{x^2-x-6}{x-1}$

1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $F(x) = -4$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $F(x) > -4$

3) α et β sont deux réels qui vérifient $F(\alpha) = F(\beta)$

Montrer que α et β sont solutions de l'équation

$t^2 - pt + p - 7 = 0$ où p est un nombre réel à déterminer.

Ex5 : Trouver deux nombres entiers naturels impairs consécutifs dont la somme des carrés égale à 8048074

Ex6 : Deux villes son distantes de 450km.

Pour parcourir cette distance, une voiture met 4heures de moins qu'un camion.

Sachant que la vitesse de la voiture dépasse celle du camion de 30km/h, quelles sont les vitesses respectives de la voiture et du camion.