Prof H . Salima	Polynômes	Niveaux : TCS et TCT

Contenu	Capacités attendues
▪ Les polynômes ▪ Égalité de deux polynômes ▪ Opérations sur les polynômes ▪ Division euclidienne par $\boldsymbol{x-\alpha}$ ▪ Racine d'un polynôme	▪ Maîtriser la technique de la division euclidienne par $\boldsymbol{x-\alpha}$ ▪ Discerner la divisibilité par $\boldsymbol{x-\alpha}$

I. Les polynômes

a. <u>Définitions</u> : $Soit\ n \in N.$

Toute expression de la forme

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. + a_nx^n$$

$$\text{ou} \quad P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} .. + a_1x + a_0$$

est appelée polynôme.

- Les nombres réels $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ sont appelés coefficients du polynôme P.
- $a_0, a_1x, a_2x^2 \ldots a_nx^n$ sont appelés termes du polynôme P.
- a_ix^i est le terme de degré i.
- si $a_n \neq 0$ alors n est le degré du polynôme P, on le note d°P et on écrit $d°P = n$
- si $n = 1$ alors $P(x) = a_1x + a_0$ est un polynôme du 1er degré (appelé aussi binôme)
- si $n = 2$ alors $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ est un polynôme du 2nd degré (appelé aussi trinôme)

b. <u>Exemples</u> :

- $P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 11$

  P est un polynôme et $d°P = 3$

  Les coefficients de P sont : 5, -2 et 11

  Les termes sont : $5x^3, -2x^2$ et 11

- $Q(x) = 7x^5 + \sqrt{2}x^2 - 3x + 1$

  Q est un polynôme et $d°Q = 5$

  Les coefficients de P sont : 7, $\sqrt{2}, -3$ et 1

  Les termes sont : $7x^5, \sqrt{2}x^2, -3x$ et 1
- $R(x) = 3x^2 + 5x^{-3} + 9$

  R n'est pas un polynôme car $-3 \notin N$

c. **Exercice :**

Soient : $P(x) = 3x^2 + 2\sqrt{x} - 5$ et $Q(x) = 6x^4 - \sqrt{3}x^2 + 7x + 8$

1) Est-ce que P est un polynôme ? justifier votre réponse.
2) Déterminer le degré, les coefficients et les termes du polynôme Q

II. Égalité de deux polynômes

a. **Activité :**

On considère les deux polynômes P et Q définis comme suit :

$$P(x) = (2x + 3)(x^2 - 3x + 2)$$

$$\text{et} \quad Q(x) = (x - 1)(2x^2 - x - 6)$$

1) Déterminer $d°P$ et $d°Q$
2) Déterminer les coefficients des deux polynômes P et Q
3) Que peut-on déduire ?

b. **Propriété :**

Soient P et Q deux polynômes.

On dit que P et Q sont égaux et on écrit $P = Q$

Si $d°P = d°Q$ et les coefficients des termes du même degré sont deux à deux égaux.

c. **Application :**

Soient les deux polynômes P et Q définis comme suit:

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3$$

$$\text{et} \quad Q(x) = 3x^4 - (2a + 1)x^3 + (b - 3)x^2 + (2c + 3)x + 3$$

Déterminer les nombres réels a, b et c pour que P et Q soient égaux.

III. Opérations sur les polynômes

a. **Activité :**

On considère les polynômes suivants :

$$P(x) = 3x^2 - x + 2$$

$$Q(x) = -3x^2 + 5x - 7$$

et $\quad R(x) = x^3 + 1$

1) Déterminer $d°P, d°Q \; et \; d°R$
2) Déterminer $P(x) + Q(x)$ puis $P(x) + R(x)$en déduire le degré $d°(P + Q)$ et $d°(P + R)$
3) Déterminer $3P(x)$, le degré $d°\ 3P(x)$ et en déduire que
$$d°\ 3P = d°P$$
4) Déterminer $P(x) \times R(x)$ puis le degré $d°(P \times R)$ et en déduire que $d°(P \times R) = d°P + d°R$

b. <u>Propriété</u> :

Soient P et Q deux polynômes et $k \in R^*$.

- La somme de P et Q est un polynôme et on a :
$$d°(P + Q) \leq \max\,(d°P; d°Q)$$
- Le produit kP est un polynôme et on a :
$$d°kP = d°P$$
- Le produit de P et Q est un polynôme et on a :
$$d°(P \times Q) = d°P + d°Q$$

c. <u>Application</u> :

Soient les deux polynômes P et Q définis comme suit:

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x - 9$$

et $Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$

Déterminer $d°(P + Q), d°(P \times Q) et\; d°(-3P)$

IV. Division par $x - \alpha$ et racine d'un polynôme

a. <u>Activité</u> :

On considère le polynôme suivant :

$$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x - 2$$

1) Vérifier que $P(1) = 0 \; et \; P(-1) = 0$ (On dit que 1 et -1 sont des

racines du polynôme P)

2) Calculer $P(2)$ et on déduire 2 n'est pas une racine de P

3) Vérifier que

$$P(x) - P(2) = (x^4 - 2^4) + (x^3 - 2^3) + (x^2 - 2^2) - (x - 2)$$

4) En déduire que $P(x) = (x - 2)Q(x) + P(2)$ où $Q(x)$est un polynôme de degré 3 et calculer $Q(x)$

5) On peut obtenir les mêmes résultats en effectuant la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x - 2$ comme suit :

$$\begin{array}{rcr|l}
 & & x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 & x - 2 \\ \cline{4-4}
-x^3(x-2) & \longrightarrow & -x^4 + 2x^3 & x^3 + 3x^2 + 7x + 13 \\ \cline{3-3}
 & & 3x^3 + x^2 - x - 2 & \uparrow \\
-3x^2(x-2) & \longrightarrow & -3x^3 + 6x^2 & \\ \cline{3-3}
 & & 7x^2 - x - 2 & Q(x) \\
-7x(x-2) & \longrightarrow & -7x^2 + 14x & \\ \cline{3-3}
 & & 13x - 2 & \\
-13(x-2) & \longrightarrow & -13x + 26 & \\ \cline{3-3}
P(2) & \longrightarrow & 24 &
\end{array}$$

$Q(x)$ est le quotient et $P(2)$ est le reste de la division euclidienne.

Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$ et par $x + 1$ et déterminer le quotient et le reste dans chacun des deux cas.

b. <u>Définition et propriété</u> :

Soit P un polynôme de degré n tel que $n \geq 1$ et soit $\alpha \in R$

- Il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$
  - ➢ $Q(x)$est appelé quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - \alpha)$
  - ➢ $P(\alpha)$est appelé reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - \alpha)$
- On dit que α est une racine de P (ou un zéro de P) si $P(\alpha) = 0$
- α est une racine de P si et seulement si $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ tel que Q est un polynôme de degré $n - 1$

  On dit que $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$

c. <u>Applications</u> :

1) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du

polynôme $P(x)$ par $x-\alpha$ dans chacun des cas suivants :

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$ et $\alpha = 1$
2. $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x$ et $\alpha = -1$
3. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$ et $\alpha = 2$
4. $P(x) = x^3 - 4x + 1$ et $\alpha = -2$

2) On considère le polynôme $P(x) = (2m-1)x^3 + 5x^2 - (1-m)x + 3$

Déterminer la valeur de m pour laquelle 2 est une racine de $P(x)$

Exercices

Ex1 : On considère le polynôme : $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 15x - 4}$

1. a) Montrer que 4 est une racine de $\boldsymbol{P(x)}$

   b) En effectuant la division euclidienne de P(x) par $\boldsymbol{x-4}$

   Montrer que $\boldsymbol{P(x) = (x-4)(x^2+4x+1)}$
2. a) Montrer que $\boldsymbol{x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)}$

   b) Déterminer les deux nombres réels a et b tels que :

$$\boldsymbol{P(x) + 2(x-4) = (x-4)(x+a)(x+b)}$$

Ex2 : On considère le polynôme : $\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4}$

1. a) Calculer P(1)

   b) Effectuer la division euclidienne de $\boldsymbol{P(x)}$ par $\boldsymbol{x-1}$
2. a) Déterminer les deux nombres réels a et b tels que :

$$\boldsymbol{(ax+b)(x-b) = 3x^2 - 4x - 4}$$

   b) Résoudre dans R l'équation :

$$\boldsymbol{3x^2 - 4x - 4 = 0}$$

   c) En déduire dans R les solutions de l'équation $\boldsymbol{P(x) = 0}$

Ex3 : On considère le polynôme : $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6}$

1. Montrer que $\boldsymbol{-1}$ *et* $\boldsymbol{2}$ sont des racines de $\boldsymbol{P(x)}$
2. Factoriser $\boldsymbol{P(x)}$
3. Résoudre dans R l'équation $\boldsymbol{P(x) = 0}$
4. a) Vérifier que pour tout nombre réel non nul $\boldsymbol{x}$, *On a* :

$$\frac{6x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} + 6$$

b) En déduire dans R^* les solutions de l'équation :

$$6x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$$

Ex4 : Soit $P(x)$ un polynôme de degré 3 tel que :

$$P(2) = 4\ ;\ P\ (3) = 9\ ;\ P(4) = 16\ et\ P(1) = 7$$

On pose : $Q(x) = P(x) - x^2$

1. Montrer qu'il existe un nombre constant k tel que :

$$Q(x) = k(x-2)(x-3)(x-4)$$

2. Calculer $Q(1)$ et en déduire la valeur de k.
3. Déterminer $P(x)$.

Ex5 : On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 4x^3 - 3x + 1\ et\ R(x = 4x^3 - 3x - 1$$

1. a) Montrer que $P(x)$ est divisible par $x + 1$

   b) Déterminer le polynôme $Q(x)$ qui vérifie :

$$P(x) = (x+1)Q(x)$$

2. Montrer que $R(x) = (x-1)(2x+1)^2$
3. Résoudre dans R les deux équations :

$$P(x) = 0\ et\ R(x) = 0$$

4. Résoudre dans R les deux inéquations :

$$P(x) \geq 0\ et\ R(x) \leq 0$$

5. En déduire l'ensemble des nombres réels x *qui vérifient :*

$$-1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1$$