

Contenu	Capacités attendues
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ L'ordre dans <math>\mathbb{R}</math></li> <li>▪ Ordre et opérations</li> <li>▪ La valeur absolue</li> <li>▪ Les intervalles</li> <li>▪ Les intervalles et la valeur absolue</li> <li>▪ L'encadrement</li> <li>▪ Les approximations</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Maîtrise des différentes techniques de comparaison de deux nombres.</li> <li>▪ Représentation des différentes relations relatives à l'ordre sur une droite numérique</li> <li>▪ Connaissance et détermination de l'approximation d'un nombre ou d'une expression à une précision donnée.</li> <li>▪ Effectuer des majorations et des minorations d'expressions algébriques</li> </ul>

## I. L'ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$

### a. Définitions :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

- On dit que  $a$  est inférieur ou égal à  $b$  et on écrit  $a \leq b$  si  $a - b \leq 0$
- On dit que  $a$  est supérieur ou égal à  $b$  et on écrit  $a \geq b$  si  $a - b \geq 0$
- On dit que  $a$  est inférieur strictement à  $b$  et on écrit  $a < b$  si  $a - b < 0$
- On dit que  $a$  est supérieur strictement à  $b$  et on écrit  $a > b$  si  $a - b > 0$

### b. Exercices :

1) Soit  $n$  un nombre entier naturel non nul. Comparer  $\frac{2n}{2n+1}$  et  $\frac{2n-1}{2n}$

2) Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs.

1. Comparer  $a + b$  et  $2\sqrt{ab}$

2. En déduire que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$  et  $(a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$

3) Comparer  $x = 2\sqrt{5}$  et  $y = 5\sqrt{2}$

4) Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $0 < a < b$ .

On pose :  $A = \frac{a+a^2}{1+a+a^2}$  et  $B = \frac{b+b^2}{1+b+b^2}$

$E = \sqrt{a} - \sqrt{b}$  et  $F = \sqrt{a+1} - \sqrt{b+1}$

1. Comparer  $A$  et  $B$

2. Montrer que  $E < 0$  et  $F < 0$
3. Montrer que  $0 < \frac{E}{F} < 1$
4. Comparer  $E$  et  $F$

## II. Ordre et opérations

### 1. Ordre et addition

#### a. Propriété :

Soient  $a, b$  et  $c$  des réels.

- Si  $a \leq b$  alors  $a + c \leq b + c$
- Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$  alors  $a + c \leq b + d$

#### b. Application :

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $a \leq \frac{5}{7}$  et  $b \leq \frac{16}{7}$

Montrer que  $a + b \leq \pi$

### 2. Ordre et multiplication

#### a. Propriété :

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels.

- Si  $a \leq b$  et  $c \geq 0$  alors  $ac \leq bc$
- Si  $a \leq b$  et  $c \leq 0$  alors  $ac \geq bc$
- Si  $0 \leq a \leq b$  et  $0 \leq c \leq d$  alors  $ac \leq bd$

#### b. Application :

Soit  $0 \leq 2x \leq 3$  et  $0 \leq 5y \leq 75$

Montrer que  $xy \leq 22.5$

### 3. Ordre et inverse

#### a. Propriété :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

- Si  $0 < a \leq b$  alors  $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
- Si  $a \leq b < 0$  alors  $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$

#### b. Application :

Soit  $x$  un nombre réel tel que :  $0 < \frac{1}{2x+1} < \frac{3}{2}$

Montrer que  $x > \frac{-1}{6}$

### III. Valeur absolue

#### a. Définitions et propriétés :

Sur un axe normé  $x$  est l'abscisse d'un point  $M$ .

- La valeur absolue de  $x$  est la distance entre l'origine du repère et le point  $M$ . On la note  $|x|$   
et on a :  $OM = |x|$  (où  $O$  est l'origine du repère d'abscisse 0)
- Si  $a$  et  $b$  sont les abscisses respectives de deux points  $A$  et  $B$  sur un axe normé, alors la distance entre  $a$  et  $b$  est la distance  $AB$  et on a :  $AB = |b - a|$
- Soient  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ . on a :
  - $|a - b| = |b - a|$
  - $|ab| = |ba|$
  - $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$  (avec  $b \neq 0$ )
  - $|a + b| \leq |a| + |b|$  et  $|a - b| \geq |a| - |b|$
  - $|a| = |b|$  signifie que  $a = b$  ou  $a = -b$

#### b. Applications :

1) Déterminer  $|x|$ ;  $|y|$ ;  $|x + y|$ ;  $|x - y|$ ;  $|xy|$  et  $\left|\frac{x}{y}\right|$

sachant que  $x = \sqrt{3} - 1$  et  $y = \frac{1}{1 - \sqrt{5}}$

2) Soient 3, 1 et  $x$  les abscisses respectives de trois points  $A$ ,  $B$  et  $M$  sur un axe normé. Calculer la distance  $MA + MB$  en fonction de  $x$ .

### IV. Intervalles

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ .

Ensemble des réels $x$ qui vérifient	Ecriture sous forme d'intervalle
$a \leq x \leq b$	$x \in [a; b]$
$a < x < b$	$x \in ]a; b[$

$a \leq x < b$	$x \in [a; b[$
$a < x \leq b$	$x \in ]a; b]$
$x \geq a$	$x \in [a; +\infty[$
$x > a$	$x \in ]a; +\infty[$
$x \leq b$	$x \in ]-\infty; b]$
$x < b$	$x \in ]-\infty; b[$

### Exercice

Ecrire l'intervalle ou la réunion d'intervalles auxquels appartient le réel  $x$  dans chacun des cas suivants :

$1 \leq x \leq 3$	$x \leq 8$	$x \leq -1$ ou $x \geq 2$
$-2 < x \leq 1$	$x < -4$	$x < 3$ ou $x > 11$
$-1 \leq x < 5$	$x \geq 3$	$x \leq -7$ ou $x > 4$
$3 < x < 7$	$x > -6$	$x < 1$ ou $x \geq 13$

## V. Intervalles et valeur absolue

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif

Ensemble des réels $x$ qui vérifient	Ecriture sous forme d'intervalle
$ x  \leq a$	$x \in [-a; a]$
$ x  < a$	$x \in ]-a; a[$
$ x  \geq a$	$x \in ]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$
$ x  > a$	$x \in ]-\infty; -a[ \cup ]a; +\infty[$

### Exercice

Ecrire l'intervalle ou la réunion d'intervalles auxquels appartient le réel  $x$  dans chacun des cas suivants :

$ x  \leq 3$	$ x  - 1 \leq 8$	$ 2x - 1  \geq 3$
$ x  < 1$	$ x  + 2 < 5$	$ 2 - 3x  > 11$
$ x  > 5$	$ x - 1  \leq 3$	$ 5x - 8  \leq 7$
$ x  \geq 7$	$ 3 - x  > 6$	$ 1 - 4x  < 13$

## VI. Encadrement

### a. Définition :

Soient  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $a < b$

Toute double inégalité parmi les doubles inégalités suivantes :

$$a \leq x \leq b; a < x < b; a \leq x < b \text{ et } a < x \leq b$$

est appelée encadrement de  $x$  d'amplitude  $b - a$

### b. Exemple :

On a :  $3,141 < \pi < 3,142$  est un encadrement de  $\pi$  d'amplitude

$$3,142 - 3,141 = 0,001 = 10^{-3}$$

### c. Exercice :

- 1) Donner un encadrement de  $\sqrt{6}$  d'amplitude 1
- 2) Déterminer un encadrement de  $d$  d'amplitude 2 et un autre d'amplitude 0,02.

## ❖ Encadrement et opérations

### 1. Propriétés :

Soient  $a \leq x \leq b$  et  $c \leq y \leq d$  deux encadrements des réels  $x$  et  $y$ .

On a :

- $a + c \leq x + y \leq b + d$  et  $a - d \leq x - y \leq b - c$
- Si  $a, b, c$  et  $d$  sont positifs alors :  $ac \leq xy \leq bd$
- Si  $a, b, c$  et  $d$  sont strictement positifs alors :

$$\frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c} \text{ et } \frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$$

### 2. Applications :

1) Soient  $0,1 \leq x \leq 0,2$  et  $1 \leq y \leq 2$

1. Encadrer  $x + y$  et  $x - y$
2. Encadrer  $xy$
3. Encadrer  $\frac{1}{y}$  et  $\frac{x}{y}$

2) Soient  $-3 \leq x \leq -2$  et  $-1 \leq y \leq -0,5$

1. Encadrer  $x + y$  et  $x - y$
2. Encadrer  $-x$  et  $-y$  puis en déduire l'encadrement de  $xy$
3. Encadrer  $\frac{x}{y}$

3) Soient  $-3 \leq x \leq -2$  et  $1 \leq y \leq 4$

1. Encadrer  $x + y$  et  $x - y$
2. Encadrer  $-x$  et en déduire l'encadrement de  $xy$
3. Encadrer  $\frac{x}{y}$

4) Soient  $-1 \leq x \leq 2$  et  $3 \leq y \leq 5$

1. Encadrer  $x + y$  et  $x - y$
2. Encadrer  $xy$  dans les deux cas suivants :
  - $-1 \leq x \leq 0$
  - $0 \leq x \leq 2$

et en déduire l'encadrement de  $xy$

3. Encadrer  $\frac{1}{y}$
4. Donner l'encadrement de  $\frac{x}{y}$  dans les deux cas suivants :
  - $-1 \leq x \leq 0$
  - $0 \leq x \leq 2$
5. En déduire l'encadrement de  $\frac{x}{y}$

## VII. Approximations

### 1. Approximation par défaut et par excès

#### a. Définition :

Soit  $a \leq x \leq b$  ( $a < x < b$ ,  $a < x \leq b$  ou  $a \leq x < b$ ) un encadrement de  $x$  d'amplitude  $b - a$

- Le nombre  $a$  est appelé approximation de  $x$  à  $b - a$  près par défaut.
- Le nombre  $b$  est appelé approximation de  $x$  à  $b - a$  près par excès.

#### b. Exemple :

On a  $3,141 \leq \pi \leq 3,142$  est un encadrement de  $\pi$  d'amplitude

$$3,142 - 3,141 = 0,001 = 10^{-3}$$

- Le nombre  $3,141$  est une approximation de  $\pi$  à  $10^{-3}$  près par défaut.
- Le nombre  $3,142$  est une approximation de  $\pi$  à  $10^{-3}$  près par excès.

c. **Exercice** :

- 1) Donner une approximation de  $\sqrt{5}$  à  $10^{-3}$  près par défaut.
- 2) Donner une approximation de  $\frac{1}{3}$  à  $10^{-5}$  près par excès.

## 2. Valeur approchée

a. **Définition** :

Soient  $x$  un nombre réel et  $r$  un nombre réel strictement positif.

Tout nombre réel  $a$  qui vérifie l'une des deux inégalités :

$$|x - a| \leq r \text{ ou } |x - a| < r$$

est appelé valeur approchée de  $x$  à  $r$  près (ou à la précision  $r$  près)

b. **Exemple** :

$$\text{On a : } |\pi - 3,142| \leq 10^{-3}$$

Donc 3,142 est une valeur approchée de  $\pi$  à la précision  $10^{-3}$  près

c. **Exercice** :

Déterminer une valeur approchée à  $\sqrt{3}$  à la précision  $10^{-3}$  près

## 3. Approximations décimales

a. **Définition** :

Soit  $x$  un nombre réel tel que :  $n \times 10^{-p} \leq x < (n + 1) \times 10^{-p}$  où  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

- Le nombre  $n \times 10^{-p}$  est appelé l'approximation décimale du nombre  $x$  à  $10^{-p}$  près par défaut.
- Le nombre  $(n + 1) \times 10^{-p}$  est appelé l'approximation décimale du nombre  $x$  à  $10^{-p}$  près par excès.

b. **Exemple** :

$$\text{On a : } 3,141 \leq \pi \leq 3,142$$

$$\text{c'est à dire } 3141 \times 10^{-3} \leq \pi \leq 3142 \times 10^{-3}$$

- Le nombre 3,141 est l'approximation décimale de  $\pi$  à  $10^{-3}$  près par défaut.
- Le nombre 3,142 est l'approximation décimale de  $\pi$  à  $10^{-3}$  près par excès.

c. **Exercice** :

$$\text{On pose } a = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Sachant que } 1.73 \leq \sqrt{3} \leq 1.74 \text{ et } 2.64 \leq \sqrt{7} \leq 2.65$$

*Donner les approximations décimales à  $10^{-2}$  près par défaut et par excès du nombre  $a$ .*

[www.salimaths.com](http://www.salimaths.com)