

Contenu	Capacités attendues
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Nombres pairs et nombres impairs. ▪ Opérations sur les nombres pairs et impairs. ▪ Multiples et diviseurs d'un nombre entier naturel. ▪ Opérations sur les diviseurs et les multiples. ▪ Nombres premiers ▪ Décomposition d'un nombre non premier en produit de facteurs premiers. ▪ Le plus grand diviseur commun de deux nombres. ▪ Le plus petit multiple commun. 	Utilisation de la parité et de la décomposition en produit de facteurs premiers dans la résolution de certains problèmes simples sur les nombres entiers naturels.

I. Nombres pairs et nombres impairs

a. Définitions

- ❖ Tout nombre entier naturel multiple de 2 est dit **nombre pair**.
- ❖ Tout nombre entier naturel qui n'est pas pair est dit **impair**.
- ❖ Tout nombre pair s'écrit sous la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- ❖ Tout nombre impair s'écrit sous la forme $2k + 1$ ou $2k - 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

b. Exemples

- 2021 est un nombre impair.
- 2022 est un nombre pair.
- $2x^2 + 12x + 4$ avec $x \in \mathbb{N}$ est un nombre pair car :

$$2x^2 + 12x + 4 = 2(x^2 + 6x + 2)$$

- $2x^2 + 12x + 9$ avec $x \in \mathbb{N}$ est un nombre impair car :

$$2x^2 + 12x + 9 = 2(x^2 + 6x + 4) + 1$$

Remarques

- ✓ Pour qu'un nombre entier naturel soit pair, il suffit que son chiffre d'unités soit 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.
- ✓ Pour qu'un nombre entier naturel soit pair, il suffit que son chiffre d'unités soit 1 ; 3 ; 5 ; 7 ou 9.
- ✓ Etudier la parité d'un nombre entier naturel c'est déterminer si ce nombre est pair ou impair.

c. Exercice

1) Soit $x \in \mathbb{N}$. Etudier la parité de $x(x + 1)$ et en déduire que le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre pair.

2) Soit $x \in \mathbb{N}$ et $a = x^2 + 3x + 2$.

1. Montrer que $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

2. En déduire que a est pair.

3) Soit $x \in \mathbb{N}$. Montrer que $b = x^2 + 7x + 13$ est impair.

II. Opérations sur les nombres pairs et impairs

a. Activité

Soient a, b et $c \in \mathbb{N}$.

Montrer que :

1. Si a et b sont pairs/impairs alors $a + b$ et $a - b$ sont pairs.
2. Si a et b ont une parité différente alors $a + b$ est impair.
3. Si a est pair alors ab est pair.
4. Si a et b sont impairs alors ab est impair.

b. Propriétés

Soient a et b des entiers naturels. On a :

- ❖ Si a et b ont la même parité, alors $a + b$ et $a - b$ sont pairs.
- ❖ Si a et b ont une parité différente, alors $a + b$ et $a - b$ sont impairs.
- ❖ Si a est pair, alors ab est pair.
- ❖ Si a et b sont impairs, alors ab est impair.

c. Application

Soient a et b deux nombres entiers naturels

Montrer que si a est pair et $a+b$ est impair, alors b est impair.

III. Multiples et diviseurs d'un nombre entier naturel

a. Définitions

Soient d et m de \mathbb{N} .

- ❖ On dit que m est un multiple de d s'il existe un nombre entier naturel n tel que : $m = n \times d$.
- ❖ On dit que d est un diviseur de m si m est multiple de d .

b. Exemples

- 12 est multiple de 2 car $12 = 2 \times 6$

- 3 est diviseur de 12 car 12 est multiple de 3.
- $15x^2 + 20$ tel que $x \in \mathbb{N}$ est multiple de 5 car $15x^2 + 20 = 5(3x^2 + 4)$

c. Exercice

Soit $x \in \mathbb{N}$

1. Montrer que $8x^2 + 24$ est multiple de 4.
2. Montrer que 7 est diviseur de $21x - 14$

IV. Opérations sur les multiples et les diviseurs

a. Activité

Soient a, b et $c \in \mathbb{N}$ (avec $a > b$).

Montrer que :

1. Si a et b sont des multiples de c alors $a + b$ et $a - b$ sont des multiples de c .
2. Si a est multiple de c alors ab est multiple de c .
3. Si a est multiple de b et b est multiple de c alors a est multiple de c .

b. Propriétés

Soient a, b et c des entiers naturels. On a :

- ❖ Si a et b sont des multiples de c alors $a + b$ et $a - b$ sont des multiples de c .
- ❖ Si a est multiple de c alors ab est multiple de c .
- ❖ Si a est multiple de b et b est multiple de c alors a est multiple de c .

c. Application

Soient a, b et c des nombres entiers naturels.

- 1) Montrer que si a et b sont des multiples de c alors $2a + 3b$ est multiple de c .
- 2) Montrer que si a est un multiple de b^2 alors a est un multiple de b .

V. Les nombres premiers

a. Définitions

Soit $x \in \mathbb{N}$.

On dit que x est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs qui sont 1 et x .

b. Exemples

- 7 est premier car il admet deux diviseurs qui sont 1 et 7.
- 3 est premier car il admet deux diviseurs qui sont 1 et 3.
- 9 n'est pas premier car il admet 3 diviseurs qui sont 1, 3 et 9.
- 1 n'est pas premier car il admet un seul diviseur qui est 1.

c. Exercice

Soit x et y deux nombres premiers tels que $x + y$ est impair.

Montrer que $x = 2$ ou $y = 2$.

VI. Décomposition d'un nombre non premier en produit de facteurs premiers

a. Activité

1) Est-ce que 80 est un nombre non premier.

2) Vérifier que $80 = 2 \times 5 \times 8$. Est-ce que 2, 5 et 8 sont premiers ?

3) Vérifier que $80 = 2^4 \times 5$.

$2^4 \times 5$ est la décomposition du nombre 80 en produit de facteurs premiers.

4) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres 48 et 70.

b. Propriété

Tout nombre entier naturel non premier et supérieur à 1 peut être décomposé en produit de facteurs premiers.

c. Application

Décomposer les nombres suivants en produit des facteurs premiers :

32, 50, 120, 180, 270 et 324.

VII. Plus grand diviseur commun

a. Activité

1) Déterminer tous les diviseurs des deux nombres 12 et 18.

2) Déterminer les diviseurs communs de 12 et 18.

3) Quel est le plus grand élément parmi ces diviseurs ?

4) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombre 12 et 18.

5) Calculer le produit des facteurs communs munis du plus petit exposant dans la décomposition en produit de facteurs premiers de 12 et 18.

6) Que peut-on déduire ?

b. Définition et propriété

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

- ❖ $d \in \mathbb{N}$ est un diviseur commun de a et b si d divise à la fois les deux nombres a et b .

- ❖ Le plus grand diviseur commun de a et b est le plus grand élément parmi les diviseurs communs de a et b , et on le note $a \wedge b$ ou $PGCD(a, b)$.
- ❖ Le plus grand diviseur commun de a et b est le produit des facteurs communs munis du plus petit exposant dans les décompositions en produit de facteurs premiers de a et de b .

c. Application

1) Décomposer les nombres suivants en produit des facteurs premiers :

240, 360, 420 et 504.

2) En déduire :

$240 \wedge 360$; $240 \wedge 420$; $240 \wedge 504$; $360 \wedge 420$; $360 \wedge 504$ et $420 \wedge 504$

VIII. Plus petit multiple commun

a. Activité

- 1) Citer les 5 premiers multiples des deux nombres 12 et 8.
- 2) En déduire le plus petit multiple commun non nul de 12 et 8.
- 3) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombre 12 et 8.
- 5) Calculer le produit des facteurs non communs et des facteurs communs munis du plus grand exposant dans les décompositions en produit de facteurs premiers de 12 et 8.
- 6) Que peut-on déduire ?

b. Définition et propriété

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

- ❖ $d \in \mathbb{N}$ est un multiple commun de a et b si d est à la fois multiple de a et de b .
- ❖ Le plus petit multiple commun de a et b est le plus petit élément parmi les multiples communs de a et b , et on le note $a \vee b$ ou $PPCM(a, b)$.
- ❖ Le plus petit multiple commun de a et b est le produit des facteurs non communs et des facteurs communs munis du plus grand exposant dans les décompositions en produit de facteurs premiers de a et b .

c. Application

Déterminer $240 \vee 360$, $240 \vee 420$, $240 \vee 504$, $360 \vee 420$, $360 \vee 504$ et $420 \vee 504$

Exercices

Ex1 : soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que les nombres $A = n^2 + 13n + 17$ et $B = n^3 - n + 1$ sont impairs.

Ex2 : soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si n est pair alors n^2 est pair
2. Montrer que si n est impair alors n^2 est impair
3. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair
4. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair

Ex3 : Soit n un nombre entier naturel.

1. Développer $(n + 1)^2 - n^2$
2. En déduire que tout nombre impair est la différence de deux carrés consécutifs
3. Ecrire 19 et 2025 comme différence de deux carrés consécutifs
4. Ecrire $n^2 + n + 7$ comme différence de deux carrés consécutifs, après avoir vérifié que $n^2 + n + 7$ est impair

Ex4 : On pose $a = 8 \times 9 \times 5$ et $b = 100$

1. Calculer $a \wedge b$ et $a \vee b$
2. En déduire $(a \vee b)^2$ et $(a \wedge b)^2$
3. Calculer $a^2 \vee b^2$ et $a^2 \wedge b^2$
4. Que remarque-t-on ?

Ex5 : On considère deux nombre entiers naturels a et b tels que :

$$ab = 2880 \text{ et } a \wedge b = 24$$

1. Déterminer $a \vee b$
2. Déterminer les diviseurs communs de a et b
3. En déduire a et b

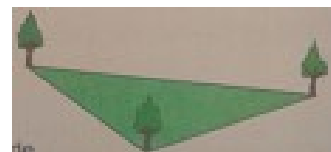
Ex6 : On considère deux nombre entiers naturels a et b tels que :

$$ab = 972 \text{ et } a \vee b = 54$$

1. Déterminer $a \wedge b$
2. En déduire les diviseurs communs de a et b
3. Déterminer a et b

Ex7 : On veut planter des arbres sur le périmètre d'un jardin triangulaire de telle sorte que :

- Un arbre est planté à chaque sommet du triangle.
- La distance entre deux arbres consécutifs est constante.



1. Quelle est la distance qu'il faut laisser entre deux arbres consécutifs ?
2. Quel est le nombre d'arbres que l'on doit planter ?

Ex8 : Un fleuriste dispose d'un certain nombre de roses :

74 roses blanches, 111 roses jaunes et 185 rouges.

Le fleuriste veut former le plus grands nombre de bouquets possible contenant tous le même nombre de chaque sorte de roses.

1. Combien de bouquets peut-on former ?
2. Quel est le nombre de roses dans chaque bouquet ?
3. Quel est le nombre de roses de chaque couleur dans chaque bouquet ?

Ex9 : On peut répartir les employés d'une société sur de grands bureaux de 24 employés ou sur des bureaux de 28 employés ou sur des bureaux de 36 employés.

Déterminer le nombre d'employés de cette société sachant qu'il est compris entre 1500 et 2000.

Ex10 : Un phare au bord de la mer envoie un signal lumineux rouge toutes les 10 secondes et un signal vert toutes les 14 secondes.

Sachant que les deux signaux sont émis simultanément à 7h du soir, répondre au questions suivantes :

1. Après combien de temps les deux signaux seront envoyés de nouveau simultanément ?
2. Combien de fois les deux signaux seront émis simultanément entre 7h et 8h30min du soir ?

www.salimaths.com